
Entwurf robuster Ausgangsrückführungen für lineare Deskriptorsysteme

Bernhard Hammer

Studienarbeit – 15. Oktober 2013

Betreuer: Dipl.-Ing. Daniel Labisch, Dipl.-Ing. Jan Strubel



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK
UND MECHATRONIK

rtm

Aufgabenstellung

Deskriptorsysteme entstehen ganz intuitiv bei der Modellierung komplexer Systeme. Die für eine regelungstechnische Behandlung wünschenswerte Überführung in ein Zustandsraumsystem in Minimalkoordinaten ist in der Regel sehr aufwändig, teilweise ist sie sogar unmöglich. Für lineare Deskriptorsysteme wurden deshalb am Fachgebiet rtm Verfahren zum Entwurf vollständiger Deskriptorrückführungen als auch zum Entwurf von Ausgangsrückführungen entwickelt, um die regelungstechnischen Aufgabenstellungen nun direkt am Deskriptorsystem zu lösen.

Da die entwickelten Verfahren auf parametrische Methoden zurückgreifen, soll in dieser Arbeit untersucht werden, wie sich die aus der Zustandsraummethodik bekannten parametrischen Ansätze zum Entwurf robuster Rückführungen ebenfalls auf lineare Deskriptorsysteme übertragen lassen.

Sämtliche Ergebnisse sind ausführlich zu dokumentieren. Die aktuelle Fassung der Richtlinien zur Anfertigung von Abschlussarbeiten ist zu beachten.

Beginn: 15. Juli 2013

Ende: 15. Oktober 2013

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Dipl.-Ing. Daniel Labisch,
Dipl.-Ing. Jan Strubel

Technische Universität Darmstadt
Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik
Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Landgraf-Georg-Straße 4
64283 Darmstadt
Telefon 06151/16-4167
www.rtm.tu-darmstadt.de





Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 15. Oktober 2013

Bernhard Hammer

Kurzfassung

Diese Studienarbeit beschäftigt sich mit linearen Deskriptorsystemen, ihrer Regelung mit Ausgangsrückführungen und der Robustheit des geschlossenen Regelkreises. Außerdem wird die Simulation von Deskriptorsystemen behandelt.

Da die Eigenwerte eines Deskriptorsystems über ein verallgemeinertes Eigenwertproblem definiert sind, wird die Herleitung einer Konditionszahl für ein solches Problem diskutiert. Die gefundene Konditionszahl ermöglicht selbst die Behandlung defekter Eigenwerte. Mittels einer gewichteten Summe wird eine aggregierte Konditionszahl definiert.

Auf eine Entwurfsmethode für Ausgangsrückführungen aufbauend, die alle für die Polplatzierung nicht benötigten Freiheitsgrade in parametrischer Form aufdeckt, wird unter Nutzung dieser Freiheitsgrade, die aggregierte Konditionszahl mittels verschiedener Optimierungsalgorithmen minimiert. Dadurch wird die Robustheit der Eigenwerte erhöht, was in Simulationsergebnissen demonstriert wird. Diese Simulationsergebnisse zeigen auch, dass die Reduktion der Kondition weitere wünschenswerte Auswirkungen auf die Systemdynamik hat.

Schlüsselwörter: Deskriptorsystem, DAE, Robust, Kondition, Optimierung, Verallgemeinertes Eigenwertproblem, Ausgangsrückführung

Abstract

This study deals with linear DAEs, their control by output feedback and the robustness of the closed-loop eigenvalues. Furthermore the simulation of DAE is addressed.

As the eigenvalues of a DAE are defined over a generalized eigenvalue problem, a condition number for such a problem is derived. This condition number even allows the treatment of defective eigenvalues. Via a weighted sum an aggregated condition number is defined.

After using a design method for output feedback controllers that reveals all the degrees of freedom not needed for pole placement in parametric form, these degrees of freedom are used to minimize the aggregated condition number by applying different optimization algorithms. Thereby the robustness of the eigenvalues is increased, as demonstrated in a simulation. The simulation in addition shows that reducing the condition number leads to other desirable effects for system dynamics.

Keywords: descriptor system, DAE, robust, condition, optimization, generalized eigenvalue problem, output feedback controller

Inhaltsverzeichnis

Symbole und Abkürzungen	vii
1. Einführung	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Vorgehensweise	2
2. Deskriptorsysteme	5
2.1. Verallgemeinertes Eigenwertproblem	5
2.2. Hauptvektoren	6
2.3. Weierstrass-Kronecker-Form	7
2.4. Zeitlösung	8
2.5. Steuer- und Beobachtbarkeit	10
2.6. Semi-explizite Form	11
3. Robustheit der Eigenwerte	13
3.1. Die Metrik	15
3.2. Gerschgorin-Theorie	16
3.3. Herleitung der Konditionszahl	17
3.3.1. Halbeinfache Eigenwerte	17
3.3.2. Defekte Eigenwerte	20
3.4. Aggregierte Konditionszahl	23
3.5. Multi-Modell-Systeme	24
4. Entwurf von Ausgangsrückführungen für Deskriptorsysteme	25
4.1. Eliminierung der Durchgriffsmatrix	26
4.2. Unabhängige Ein- und Ausgänge	26
4.3. Entwurf dynamischer Ausgangsrückführungen	28
4.3.1. Bestimmung der dynamischen Ordnung	28
4.3.2. Zurückführung auf den Entwurf statischer Ausgangsrückführungen	29
4.4. Das Reglerentwurfsverfahren	30
4.4.1. Erste Kaskade	30
4.4.2. Zweite Kaskade	32
4.5. Regularität des geschlossenen Regelkreises	33
4.6. Vorfilterentwurf	34

5. Verbesserung der Robustheit des geschlossenen Regelkreises	35
5.1. Gradientenverfahren	35
5.1.1. Ableitung des Reglers nach den Parametern	37
5.1.2. Ableitung der Konditionszahl nach dem Regler	37
5.2. Gütevektroptimierung	40
5.3. Weitere Algorithmen	42
5.4. Simulationsergebnisse	42
6. Implementierung in Matlab	47
6.1. Grafische Benutzeroberfläche	47
6.2. Matlab-Toolbox	48
7. Simulation	51
8. Zusammenfassung und Ausblick	57
A. Anhang	59
Literaturverzeichnis	63

Symbole und Abkürzungen

Symbole

Matrizen und Vektoren, Eigen- und Singulärwerte

$\mathbf{0}$	Nullmatrix passender Dimension
\mathbf{A}	Systemmatrix
\mathbf{B}	Eingangsmatrix, Steuermatrix
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix, Messmatrix
\mathbf{D}	Durchgangsmatrix
\mathbf{E}	Systemmatrix
\mathbf{e}_i	i -ter kanonischer Einheitsvektor
\mathbf{F}	Vorfiltermatrix
$\mathbf{G}(\lambda)$	Übertragungsmatrix
\mathbf{H}, \mathbf{J}	Transformationsmatrizen der Weierstrass-Kronecker-Form
\mathbf{h}, \mathbf{j}	Vektoren der Transformationsmatrizen der Weierstrass-Kronecker-Form
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{L}_{s_L}	Matrix der Linksmessvektoren
\mathbf{l}	Linksmessvektor
\mathbf{M}	$= \mathbf{A} + \mathbf{BRC}$, Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises
\mathbf{N}	Nilpotente Matrix
\mathbf{P}_{s_R}	Steuervektormatrix
\mathbf{p}	Steuervektor
\mathbf{Q}_{s_R}	Messvektormatrix
\mathbf{q}	Messvektor
\mathbf{R}	Reglermatrix der Ausgangsrückführung
\mathbf{S}	Störmatrix
\mathbf{S}_{se}	Matrix der Linkssingulärvektoren zur Transformation in semi-explizite Form
\mathbf{S}_{s_L}	Matrix der Linkssteuervektoren
\mathbf{s}	Linkssteuervektor
s	Komplexes Argument einer Funktion im Laplacebereich
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{T}_{se}	Matrix der Rechtssingulärvektoren zur Transformation in semi-explizite Form
\mathbf{u}	Eingangs- oder Stellgrößenvektor
\mathbf{V}	Eigenvektormatrix

$\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i,j}^k$	Eigenvektor, Hauptvektor
\mathbf{W}	Linkseigenvektormatrix
\mathbf{w}	Vektor der Führungsgrößen
\mathbf{w}_j	Linkseigenvektor
\mathbf{x}	Zustände, Deskriptorvektor
\mathbf{y}	Ausgänge
α	Zähler einer als Bruch dargestellten komplexen Zahl
α_i	Zähler eines als Bruch dargestellten Eigenwertes
β	Nenner einer als Bruch dargestellten komplexen Zahl
β_i	Nenner eines als Bruch dargestellten Eigenwertes
Θ	Charakteristische Systemparameterkonfiguration aus B
λ	Komplexe Zahl
λ_i	Eigenwert
$\pi(s)$	Charackteristisches Polynom
Σ	Diagonalmatrix mit der Größe nach sortierten Singulärwerten auf der Hauptdiagonalen

Operatoren, Funktionen

$\deg(\cdot)$	Grad eines Polynoms
$\det(\cdot)$	Determinante einer Matrix
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	Diagonalmatrix, auf deren Diagonale die Werte a_1, \dots, a_n stehen
$J_x(\mathbf{P}_{sR}, \mathbf{L}_{sL})$	Funktion zur Berechnung der aggregierten Kondition
$\text{rg}(\cdot)$	Rang einer Matrix
$s(\lambda)$	Projektion einer komplexen Zahl auf den Einheitskreis
$\delta(t)$	Dirac-Funktion
$\sigma(\cdot, \cdot)$	Spektrum eines Matrixpaares
$\chi(\cdot, \cdot)$	Chordale Metrik zweier Punkte der erweiterten komplexen Zahlenebene
$\ \cdot\ _p$	Allgemeine Vektornorm p-Norm, oder die dieser Norm zugeordnete Matrixnorm
$(\cdot)^T$	Transponierte Matrix
$(\cdot)^+$	Pseudoinverse Matrix
$\dot{(\cdot)}$	Zeitableitung
$(\cdot)'$	Einfache Ableitung
$(\cdot)^{(n)}$	n-fache Ableitung nach der Zeit

Dimensionen, ganzzahlige Parameter, Skalare

c_i	Vorgabewerte der Gütevektroptimierung
g_i	Gewichtung der Konditionszahl eines Eigenwertes
h	Nilpotenzindex von N
k	Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes
n	Anzahl der Zustands- oder Deskriptorvariablen
n_d	Dynamische Ordnung der Ausgangsrückführung
n_e	Anzahl endlicher Eigenwerte
$n_{e,v}$	Anzahl endlicher mit einer Ausgangsrückführung verschiebbarer Eigenwerte
n_v	Anzahl mit einer Ausgangsrückführung verschiebbarer Eigenwerte
n_∞	Anzahl unendlicher Eigenwerte
$n_{\infty,s}$	Anzahl unendlicher steuerbarer, d. h. mit einer vollständigen Deskriptorrückführung verschiebbarer Eigenwerte
$n_{\infty,v}$	Anzahl unendlicher mit einer Ausgangsrückführung verschiebbarer Eigenwerte
p	Anzahl der Systemeingänge
\check{p}	Anzahl unabhängiger Systemeingänge
q	Anzahl der Systemausgänge
\check{q}	Anzahl unabhängiger Systemausgänge
r	Dynamische Ordnung (Anzahl der differentiellen Variablen)
s_L	Anzahl Eigenwerte, die durch die zweite Kaskade festgelegt werden
s_R	Anzahl Eigenwerte, die durch die erste Kaskade festgelegt werden
ν_{ges}	Aggregierte Konditionszahl
ν_i	Konditionszahl eines Eigenwertes

Indizes

d	Dynamischer Regler oder um die Dynamik des Reglers erweitertes System
de	System, bei dem durch Erweiterung der Durchgriff eliminiert wurde und das um die Dynamik des Reglers erweitert wurde
e	Endlich, langsames Teilsystem oder System, bei dem durch Erweiterung der Durchgriff eliminiert wurde
ges	Gesamt
N	Nebendiagonalelement
s	Stationär
se	Semi-explicite Form
v	Verschiebbar, vollständig steuer- und beobachtbar
vk	Verkopplung
w	Weierstrass-Kronecker-Form

∞ Unendlich, schnelles Teilsystem

Regionen, Mengen, Bereiche

B	Der zulässige Bereich der Systemparameter beim Multi-Modell-System
D_i	Regionen des verallgemeinerten Gerschgorin Theorems
G_i	Regionen, für die $D_i \subset G_i$ gilt
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
ρ_i	Chordaler Radius der Region G_i
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
\mathbb{C}	Komplexe Zahlen
Γ	Bereich, in dem die Pole sich für alle mit B möglichen Systemparameterkonfigurationen bewegen sollen

Abkürzungen

bspw.	Beispielsweise
bzw.	Beziehungsweise
DAE	differential-algebraic equations
d. h.	das heißt
f.	folgende
ff.	[und] die folgenden
fminsearch	Matlab-Funktion: Find minimum of unconstrained multivariable function using derivative-free method
fminunc	Matlab-Funktion: Find minimum of unconstrained multivariable function
GRK	Geschlossener Regelkreis
GUI	Graphical User Interface
OFBDp	output feedback for regular descriptor systems in parametric form
SEF	semi-explizite Form
vgl.	Vergleiche
WKF	Weierstrass-Kronecker-Form
z. B.	Zum Beispiel

1 Einführung

1.1 Einleitung

Die weit verbreitete von Kalman eingeführte Zustandsraummethodik [8] basiert auf der Beschreibung eines Systems durch einen Satz von Differentialgleichungen. Allerdings ist es bei der Modellierung eines dynamischen Systems oft zweckmäßig oder gar notwendig auch algebraische Zusammenhänge zu berücksichtigen. Dann liegt kein klassisches Zustandsraumsystem mehr vor, sondern ein sogenanntes verallgemeinertes Zustandsraumsystem. Andere Namen sind singuläres System, Deskriptorsystem, differential-algebraisches Gleichungssystem oder auf englisch „differential-algebraic equations“ (DAE).

Das Zulassen von algebraischen Gleichungen in der Systembeschreibung vereinfacht insbesondere die Modellbildung, da es möglich wird, ein komplexes System in Teilsysteme zu unterteilen und mithilfe der algebraischen Gleichungen zu einem Ganzen zu rekombinieren. Allerdings ist es häufig sehr aufwändig, teilweise sogar unmöglich, ein Deskriptorsystem in ein klassisches Zustandsraumsystem zu überführen. Daher ist es wichtig, die Systemdynamik auch direkt am Deskriptorsystem analysieren und beeinflussen zu können. Die für die Analyse der Systemdynamik notwendigen theoretischen Grundlagen werden in dieser Arbeit behandelt. Für die Beeinflussung der Systemdynamik wird ein Reglerentwurfsverfahren herangezogen, das die Vorgabe sämtlicher verschiebbarer Eigenwerte direkt am Deskriptorsystem ermöglicht. Darüber hinaus deckt es die für die Polvorgabe nicht benötigten Freiheitsgrade in parametrischer Form auf.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Verwendung dieser übrigen Freiheitsgrade, um die Robustheit der Eigenwerte zu erhöhen. Robustheit des Systemverhaltens ist ein wichtiges Gebiet der Regelungstechnik, da jedes Modell nur näherungsweise gilt und es in der Praxis immer Parameter wie bspw. Reibung und Luftdichte gibt, die gewissen Schwankungen unterliegen. Gerade bei Deskriptorsystemen können sehr kleine Störungen im Modell dramatische Auswirkungen auf das Systemverhalten haben. Wird die Robustheit der Eigenwerte erhöht, so ist der Puffer für solche Schwankungen automatisch größer. Ein vielleicht noch wichtigerer Effekt einer im Reglerentwurfsverfahren fest integrierten Robustheitsoptimierung könnte sein, dass der Ingenieur daran erinnert wird, dass die mathematisch exakt platzierten Eigenwerte und die simulierte Systemdynamik in der Praxis von den Berechnungen abweichen können.

1.2 Vorgehensweise

Ein lineares zeitinvariantes Deskriptorsystem wird durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{1.1}$$

beschrieben.

Dabei ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Deskriptorvektor, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ der Stellgrößenvektor und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ der Ausgangsgrößenvektor. Zusätzlich zu den aus der klassischen Zustandsraumdarstellung bekannten Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ kommt die Matrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hinzu, die auch singulär sein darf.

Für ein solches System soll eine Ausgangsrückführung entworfen werden, die die Vorgabe aller verschiebbaren Eigenwerte ermöglicht. Hierbei kann es vorkommen, dass eine statische Ausgangsrückführung nicht genug Freiheitsgrade zur Verfügung stellt. In einem solchen Fall wird eine dynamische Ausgangsrückführung entworfen:

$$\text{Statische Ausgangsrückführung:} \quad \mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{w} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dynamische Ausgangsrückführung der Ordnung } n_d: \quad & \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{y} + \mathbf{F}_1\mathbf{w} \\ & \mathbf{u} = \mathbf{C}_d\mathbf{x}_d + \mathbf{D}_d\mathbf{y} + \mathbf{F}_2\mathbf{w} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für die Polplatzierung nicht benötigte Freiheitsgrade sollen dazu genutzt werden, die Robustheit der Pole zu erhöhen.

Bevor das konkrete Reglerentwurfsverfahren diskutiert wird, werden in Kapitel 2 einige theoretische Grundlagen von Deskriptorsystemen behandelt. Diese dienen als Fundament für die späteren Kapitel und helfen dabei, die Unterschiede zur Theorie der klassischen Zustandsraum-systeme zu verstehen.

Kapitel 3 beschäftigt sich im Anschluss mit der Störungstheorie für das verallgemeinerte Eigenwertproblem. Am Ende des Kapitels steht eine Konditionszahl für die Robustheit der Eigenwerte eines Deskriptorsystems.

Nachdem in Kapitel 2 und 3 die notwendigen Grundlagen behandelt wurden, wird in Kapitel 4 das Reglerentwurfsverfahren behandelt. Das Verfahren setzt ein System ohne Durchgriff voraus, für das eine statische Ausgangsrückführung entworfen werden soll. Es werden zwei einfache Transformationen behandelt. Die erste Transformation ermöglicht es, Systeme mit Durchgriff auf Systeme ohne Durchgriff zurückzuführen. Die zweite Transformation führt den Entwurf einer dynamischen Ausgangsrückführung auf den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung zurück. Hat ein zu regelndes System einen Durchgriff, oder soll eine dynamische Ausgangsrückführung entworfen werden, so wird davon ausgegangen, dass das Problem mithilfe dieser

Transformationen auf den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung für ein System ohne Durchgriff zurückgeführt wird.

Nachdem diskutiert wurde, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einem System ohne Durchgriff ausgegangen werden kann, für das eine statische Rückführung entworfen werden soll, wird das eigentliche Entwurfsverfahren nach [15] behandelt. Dieses ermöglicht die Vorgabe aller verschiebbaren (steuer- und beobachtbaren) Eigenwerte und deckt alle für die Eigenwertplatzierung nicht benötigten Entwurfsfreiheitsgrade in parametrischer Form auf. Dabei benötigt das Entwurfsverfahren, anders als viele andere Verfahren, keine numerisch schwierige Transformation des Deskriptorsystems in eine andere Form.

In Kapitel 5 wird die Verbesserung der Robustheit des geschlossenen Regelkreises durch Minimierung der in Kapitel 3 eingeführten Konditionszahl behandelt. Im ersten Abschnitt wird ein Gradient berechnet, der für die Umsetzung eines Gradientenverfahrens verwendet werden kann. Außerdem kann der Gradient auch für die Implementierung der im zweiten Abschnitt behandelten Gütevektoroptimierung genutzt werden. Alternativ lässt sich der Gradient über finite Differenzen numerisch annähern. Nachdem das Gradientenverfahren und die Gütevektoroptimierung wegen der komplizierten analytischen Herleitung des Gradienten eingehender behandelt wurden, wird im dritten Abschnitt kurz auf weitere Optimierungsalgorithmen eingegangen. Diese sind das Verfahren von Hooke und Jeeves, der evolutionäre Algorithmus sowie der in Matlab bereits vorimplementierte Simplex-Algorithmus nach Nelder und Mead. Zuletzt werden im vierten Abschnitt Simulationsergebnisse analysiert. Dafür werden geschlossene Regelkreise gestört und die Eigenwerte sowie Sprungantworten unterschiedlich robuster Systeme miteinander verglichen. Durch diesen Vergleich wird deutlich, dass die Minimierung der Kondition tatsächlich zu robusteren Eigenwerten führt. Außerdem zeigen die Simulationsergebnisse, dass damit auch weitere wünschenswerte Auswirkungen für die Systemdynamik einhergehen.

Um die im Rahmen dieser Arbeit programmierten Funktionen möglichst leicht anwendbar zu machen, wurde eine grafische Benutzeroberfläche entworfen. Außerdem wurden die Funktionen in eine Matlab-Toolbox für Deskriptorsysteme integriert. Auf beides wird in Kapitel 6 eingegangen.

In Kapitel 7 wird die Simulation von Deskriptorsystemen thematisiert. Diese kann nicht mithilfe der von Matlab zur Verfügung gestellten Standardintegrationsverfahren durchgeführt werden, sondern es sind spezielle Vorgehensweisen notwendig.

Abschließend werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf weiter zu untersuchende Aspekte der Minimierung der Kondition gegeben.



2 Deskriptorsysteme

In diesem Kapitel werden die Grundlagen von Deskriptorsystemen behandelt. Es wird das Eigenwertproblem des Deskriptorsystems diskutiert und die Berechnung der Hauptvektoren behandelt. Dann wird eine Transformation dargestellt, die der Jordanform für klassische Zustandsraumsysteme ähnelt. Auf diese Transformation aufbauend wird die Zeitlösung von Deskriptorsystemen analysiert. Aus dieser Analyse ergeben sich gewisse potentielle Eigenschaften der Zeitlösung. Es werden Kriterien zum Testen dieser Eigenschaften geliefert. Diesen folgen Kriterien für die Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit der Eigenwerte. Zuletzt wird eine andere Darstellungsweise des Deskriptorsystems behandelt, in der die algebraischen Gleichungen von den differentiellen Gleichungen getrennt werden.

2.1 Verallgemeinertes Eigenwertproblem

Während bei einem klassischen Zustandsraumsystem ein gewöhnliches Eigenwertproblem vorliegt, liegt bei einem Deskriptorsystem wegen der Singularität von E ein verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$E\mathbf{v}\lambda_i = A\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

vor.

Aus der Theorie der Matrizen [5] (S. 373) ist bekannt, dass es bei einem solchen System vorkommen kann, dass jedes Skalar Eigenwert des Problems ist. In einem solchen Fall ist $\det(sE - A) \equiv 0$ und das System wird als singulär bezeichnet.

Satz 2.1

Das System (1.1) ist **regulär**, wenn $\det(sE - A) \not\equiv 0$.

Die Regularität eines Deskriptorsystems garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung [3] (S. 7). Sie wird im Folgenden immer vorausgesetzt und beim Reglerentwurf für den geschlossenen Regelkreis sichergestellt.

Bei einem verallgemeinerten Eigenwertproblem treten außerdem Eigenwerte im Unendlichen auf. Dies kann durch eine andere Formulierung des Eigenwertproblems in Form von

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\alpha_i}{\beta_i} & i &= 1, \dots, n \\ E\mathbf{v}\alpha_i &= A\mathbf{v}\beta_i & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

verdeutlicht werden.

Wird $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ erweitert, so liegt trotzdem der gleiche Eigenwert λ_i vor. Diese Erweiterung lässt sich im Eigenwertproblem wieder kürzen, oder als Skalierung der Eigenvektoren ansehen. Da diese Erweiterung von $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ offensichtlich keine Auswirkung auf das Eigenwertproblem hat, wird für alle endlichen Eigenwerte $\alpha_i = \lambda_i$ und $\beta_i = 1$ und für alle unendlichen Eigenwerte $\alpha_i = 1$ und $\beta_i = 0$ definiert. Somit sind die unendlichen Eigenwerte mathematisch den endlichen Eigenwerten in null sehr ähnlich, was bereits zeigt, dass sie nicht vernachlässigt werden dürfen. Die Auswirkung der unendlichen Eigenwerte auf die Zeitlösung wird in Kapitel 2.4 genauer untersucht.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\pi(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ eines Deskriptorsystems liefern nur die endlichen Eigenwerte. Es gibt also $n_e = \deg(\pi(s))$ endliche und $n_\infty = n - n_e$ unendliche Eigenwerte [5] (S. 374 f.).

2.2 Hauptvektoren

Bei der Bestimmung der Hauptvektoren eines Deskriptorsystems [14] muss zwischen Hauptvektorketten für endliche Eigenwerte und solchen für unendliche Eigenwerte unterschieden werden:

$$\begin{array}{ll} \text{Für endliche Eigenwerte:} & (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{i,j}^k = -\mathbf{E} \mathbf{v}_{i,j}^{k-1}, \quad \mathbf{v}_{i,j}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{i,j}^1 \neq \mathbf{0} \\ \text{Für unendliche Eigenwerte:} & \mathbf{E} \mathbf{v}_{\infty,j}^k = \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j}^{k-1}, \quad \mathbf{v}_{i,j}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{i,j}^1 \neq \mathbf{0} \end{array}$$

Der Index k steht für die Stufe des Hauptvektors, wobei es keine Hauptvektoren nullter Stufe gibt. Hauptvektoren erster Stufe sind Eigenvektoren. Der Index i bezieht sich auf den Eigenwert, zu dem die Hauptvektoren gehören. Der Index j besagt, zu welchem Jordanblock der Hauptvektor gehört. j geht also für einen Eigenwert von eins bis zur geometrischen Vielfachheit des Eigenwertes. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist die Dimension des von den zugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Raums. Sie kann niemals größer sein als die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes, die seiner Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\pi(s)$ entspricht.

In [15] (S. 14 und 143 f.) werden die Hauptvektorketten und ihr Einfluss auf die Trajektorie des Deskriptorsystem eingehender untersucht. Dort wird gezeigt, dass die Bewegung in „Richtung“ des Hauptvektors höchster Stufe einer Hauptvektorkette, die zum unendlichen Eigenwert gehört, ausschließlich und in proportionaler Weise von den Eingangsgrößen abhängt. Die algebraische Vielfachheit der unendlichen Eigenwerte ist $n - n_e$ und die geometrische Vielfachheit ist $n - r$. Dabei entspricht $r = \text{rg}(\mathbf{E})$ der Anzahl der differentiellen Variablen und wird dynamische Ordnung genannt. Somit gibt es für die unendlichen Eigenwerte immer $n - r$ Hauptvektoren höchster Stufe und $r - n_e$ Hauptvektoren, die nicht die höchste Stufe haben. Weiterhin wird gezeigt, dass die Hauptvektoren, die nicht zu den r dynamischen Modi gehören, durch eine proportionale Rückführung des Deskriptorvektors nicht verändert werden können. Daher werden diese $n - r$ Modi auch als nichtdynamisch bezeichnet.

2.3 Weierstrass-Kronecker-Form

Die Weierstrass-Kronecker-Form (WKF) eines Deskriptorsystems ist eine besondere Darstellungsweise. Sie ähnelt der Jordanform für klassische Zustandsraumsysteme und kann darüber hinaus als Aufteilung des Deskriptorsystems in ein klassisches Zustandsraumsystem und ein Deskriptorsystem interpretiert werden. Auf diese Aufteilung basiert die Bestimmung der Zeitlösung in Kapitel 2.4.

Eine quadratische Matrix \mathbf{N} heißt nilpotent, falls es einen Faktor $h \in \mathbb{N}$ gibt, für den

$$\mathbf{N}^h = \mathbf{0}$$

gilt. h wird Nilpotenzindex genannt.

Satz 2.2

Für jedes reguläre System lassen sich zwei reguläre Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{J} finden, für die

$$\mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{I}_{n_e}, \mathbf{N}) \qquad \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{A}_w, \mathbf{I}_{n_\infty})$$

gilt.

Dabei ist $n = n_e + n_\infty$, $\mathbf{A}_w \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ und $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_\infty \times n_\infty}$. \mathbf{N} ist nilpotent und \mathbf{N} und \mathbf{A}_w liegen in Jordanform vor. Der Nilpotenzindex von \mathbf{N} ist $h \leq n_\infty$.

Dieser Satz wird z. B. in [21] (S. 401) bewiesen. Allerdings ist die Berechnung der Transformationsmatrizen \mathbf{H} und \mathbf{J} , wie sie im Beweis erfolgt, numerisch instabil. Dies liegt daran, dass die numerisch schlecht konditionierte Jordanform für den Beweis herangezogen wird. Die Bestimmung von \mathbf{H} und \mathbf{J} direkt aus den Hauptvektorketten [14] (S. 9-11) ist allerdings ebenfalls schlecht konditioniert, da die Berechnung der Eigenvektoren numerische Probleme bereitet. Die Bestimmung der WKF ist also in jedem Fall numerisch schlecht konditioniert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Transformationsmatrizen der WKF direkt aus den Hauptvektorketten auf folgende Weise [14] (S. 9-11) bestimmt:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{E} \mathbf{v}_{i,j}^k \mid \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j}^k \right]^{-1}, \qquad \mathbf{J} = \left[\mathbf{v}_{i,j}^k \mid \mathbf{v}_{\infty,j}^k \right]. \quad (2.2)$$

$\mathbf{v}_{i,j}^k$ sind die Hauptvektoren aus Abschnitt 2.2. Diese sollten so angeordnet werden, dass die Hauptvektorketten erhalten bleiben und möglichst kurz sind. Da \mathbf{H} und \mathbf{J} quadratische Matrizen der Dimension n sind, werden insgesamt n Hauptvektoren benötigt. Davon müssen n_e zu den endlichen Eigenwerten und n_∞ zu den unendlichen Eigenwerten gehören.

Mit der Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{x}}$$

und Multiplikation von links mit \mathbf{H} folgt aus einem System (1.1) ohne Durchgriff

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{2.3}$$

wobei dann $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{I}_{n_e}, \mathbf{N})$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{I}_{n_\infty})$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{H}\mathbf{B}$ und $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{J}$ gilt.

Mit $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_{w,1}^T, \mathbf{x}_{w,2}^T]^T$, $\mathbf{x}_{w,1} \in \mathbb{R}^{n_e}$, $\mathbf{x}_{w,2} \in \mathbb{R}^{n_\infty}$ sowie $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}_{w,1}^T, \mathbf{B}_{w,2}^T]^T$ und $\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_{w,1}^T, \mathbf{C}_{w,2}^T]^T$ lässt sich das transformierte System (2.3) in zwei Subsysteme unterteilen, deren Lösung zusammen die Lösung von (2.3) ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{w,1} &= \mathbf{A}_w \mathbf{x}_{w,1} + \mathbf{B}_{w,1} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{w,1} &= \mathbf{C}_{w,1} \mathbf{x}_{w,1}\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\dot{\mathbf{x}}_{w,2} &= \mathbf{x}_{w,2} + \mathbf{B}_{w,2} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{w,2} &= \mathbf{C}_{w,2} \mathbf{x}_{w,2}\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{w,1} + \mathbf{y}_{w,2}.\tag{2.6}$$

Das erste Subsystem (2.4) ist ein klassisches Zustandsraumsystem und wird langsames System genannt. System (2.5) ist weiterhin ein Deskriptorsystem und wird schnelles System genannt [3] (S. 10-12). Im folgenden Abschnitt werden die Zeitlösungen der Subsysteme analysiert. Dabei wird deutlich, warum die Subsysteme so heißen. Offensichtlich gehören die endlichen Eigenwerte zum langsamen und die unendlichen Eigenwerte zum schnellen Subsystem.

2.4 Zeitlösung

Es soll das dynamische Verhalten von Deskriptorsystemen untersucht werden. Dazu wird das Deskriptorsystem in WKF betrachtet und die Zeitlösungen der Subsysteme bestimmt. Ihre Überlagerung ergibt die Zeitlösung des zugrunde liegenden Deskriptorsystems.

Das langsame Subsystem (2.4) ist ein klassisches Zustandsraumsystem, dessen dynamisches Verhalten hinreichend bekannt ist:

$$\mathbf{x}_{w,1}(t) = e^{\mathbf{A}_w t} \mathbf{x}_{w,1}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}_w(t-\tau)} \mathbf{B}_{w,1} \mathbf{u}(\tau) d\tau.\tag{2.7}$$

Um gemäß (2.6) den Ausgang des regulären Deskriptorsystems zu kennen, muss auch der Ausgang des schnellen Subsystems (2.5) bekannt sein.

Durch Laplacetransformation von (2.5) folgt [3] (S. 19):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{w,2}(s) &= (s\mathbf{N} - \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{N}\mathbf{x}_{w,2}(0) + \mathbf{B}_{w,2}\mathbf{u}(s)) = - \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{N}^i s^i (\mathbf{N}\mathbf{x}_{w,2}(0) + \mathbf{B}_{w,2}\mathbf{u}(s)) \\ &\quad \circ \\ \mathbf{x}_{w,2}(t) &= - \sum_{i=0}^{h-1} \delta^{(i)} \mathbf{N}^{i+1} \mathbf{x}_{w,2}(0) - \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{N}^i \mathbf{B}_{w,2} \mathbf{u}^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8) ist die Lösung des schnellen Subsystems im Zeitbereich.

Eine genauere Betrachtung von (2.7) zeigt, dass die Eingänge \mathbf{u} sich beim langsamen Subsystem nur über das Integral auf die Lösung auswirken. Damit ist die Lösung $\mathbf{x}_{w,1}$ von $\mathbf{u}(t - \varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, t]$ abhängig. Der Einfluss der aktuellen Stellgrößen auf die aktuellen Zustände ist verschwindend gering. Im Gegensatz dazu hängt die Lösung des schnellen Subsystems (2.8) bei Vernachlässigung der Anfangswerte ausschließlich von den aktuellen Eingängen und ihren Ableitungen ab. Dies hat zur Folge, dass die Zustände vom langsamen Subsystem „langsam“ auf eine Änderung der Eingänge reagieren, während die des schnellen Subsystems „schnell“ bzw. sogar augenblicklich reagieren. Diese Beobachtung begründet die Namen der Subsysteme.

Die Untersuchung des schnellen Subsystems zeigt, dass das Deskriptorsystem sprunghaft ist [3] (S. 17) und die Lösung Dirac-Impulse enthalten kann. Wenn die Lösung von der Ableitung der Eingänge abhängt, so ist die Differenzierbarkeit der Eingänge offensichtlich eine Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösung und also auch für die Regularität des Systems.

Ein Deskriptorsystem, dessen Lösung nicht von der Ableitung seiner Eingänge abhängt, wird „proper“ genannt. Ein System ist proper, wenn es keine unendlichen steuerbaren Eigenwerte hat. Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, sind die nichtdynamischen Modi nie steuerbar, sodass es nur auf die dynamischen unendlichen Eigenwerte ankommt.

Die Anfangsbedingungen werden als konsistent bezeichnet, wenn

$$\mathbf{x}_{w,2}(t_0) = - \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{N}^i \mathbf{B}_{w,2} \mathbf{u}^{(i)}(t_0^+)$$

erfüllt ist.

Konsistente Anfangsbedingungen erfüllen die algebraischen Gleichungen des Systems. Sind die Anfangsbedingungen nicht konsistent, so enthält die Lösung Dirac-Impulse, sodass die algebraischen Gleichungen für $t > t_0$ auch wieder erfüllt werden.

Im Gegensatz zu klassischen Zustandsraumsystemen ist ein Deskriptorsystem also recht kompliziert, da die Lösung Impulse und Sprünge enthalten kann. Daher existieren für Deskriptorsysteme Kriterien für Regularität, Sprunghaftigkeit und Impulsfreiheit, die für klassische Zustandsraumsysteme überflüssig sind. Wie bei klassischen Zustandsraumsystemen auch, gibt es außerdem ein Kriterium für Stabilität.

Satz 2.1 liefert bereits ein Kriterium für Regularität. Die folgenden Sätze liefern Kriterien für die Untersuchung der Stabilität, der Sprungfähigkeit und der Impulsfreiheit.

Satz 2.3

Das System (1.1) ist **nicht sprungfähig**, wenn $n = r$.

Ein „echtes“ Deskriptorsystem, dessen Systemmatrix E Rangabfall hat, wird wegen der nichtdynamischen Modi immer sprungfähig sein.

Satz 2.4

Das System (1.1) ist **impulsfrei**, wenn $n_e = r$.

Impulse sind in der Regel nicht erwünscht, da starke Impulse zu Funktionsstörungen oder sogar zur Zerstörung eines technischen Systems führen können [3] (S. 36).

Satz 2.5

Das System (1.1) ist **stabil**, wenn die Wurzeln von $\det(sE - A) = 0$ in der linken s -Halbebene liegen.

Aus der WKF können ebenfalls Bedingungen gewonnen werden, mit denen sich diese Eigenschaften prüfen lassen. Da die numerische Berechnung der WKF schlecht konditioniert ist [25] (S. 11) und bereits Bedingungen existieren, die ohne Transformation auskommen, wird auf diese Bedingungen nicht weiter eingegangen.

2.5 Steuer- und Beobachtbarkeit

Die Steuer- und Beobachtbarkeit von endlichen Eigenwerten lässt sich durch eine Abwandlung des Hautus-Kriteriums überprüfen [3] (S. 29 ff.).

Satz 2.6

Ein endlicher Eigenwert λ_i ist **steuerbar**, wenn $\text{rg} \begin{pmatrix} \lambda_i E - A & -B \end{pmatrix} = n$ erfüllt ist.

Satz 2.7

Ein endlicher Eigenwert λ_i ist **beobachtbar**, wenn $\text{rg} \begin{pmatrix} \lambda_i E - A \\ -C \end{pmatrix} = n$ erfüllt ist.

Die Anzahl der steuer- und beobachtbaren endlichen Eigenwerte wird mit $n_{e,v}$ bezeichnet. Das v steht für „verschiebbar“, da es sich um die Eigenwerte handelt, die mittels einer Ausgangsrückführung verschoben werden können. Dass die Eigenwerte dafür nicht nur steuerbar, sondern auch beobachtbar sein müssen, lässt sich auf einfache Weise verdeutlichen. Ist ein Eigenwert unbeobachtbar, so machen sich die zugehörigen Eigenbewegungen an den Ausgängen y nicht bemerkbar. Dies hat zur Folge, dass sich diese Bewegungen nicht durch eine Rückführung von y regeln lassen. Somit lassen sich ihre Eigenwerte auch nicht verschieben.

Die Anzahl der verschiebbaren unendlichen Eigenwerte $n_{\infty,v}$ lässt sich über folgenden Satz bestimmen:

Satz 2.8

Es gibt

$$n_{\infty,v} = \max_R (\deg(\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{BRC})) - n_e)$$

durch eine Ausgangsrückführung eliminierbare unendliche Eigenwerte [26].

Insgesamt gibt es also $n_v = n_{e,v} + n_{\infty,v} \leq r$ verschiebbare (d. h. steuer- und beobachtbare) Eigenwerte. Soll die Anzahl der unendlichen Eigenwerte bestimmt werden, die durch eine vollständige Deskriptorrückführung verschiebbar sind, so muss in Satz 2.8 die Deskriptorrückführung als Regler verwendet und \mathbf{C} weggelassen werden. Der Satz liefert dann die Anzahl der unendlichen steuerbaren Eigenwerte $n_{\infty,s}$.

2.6 Semi-explicite Form

Eine weitere Darstellungsweise von Deskriptorsystemen ist die semi-explicite Form (SEF). An ihr lässt sich gut erkennen, dass ein Deskriptorsystem aus Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen besteht. Für die Transformation in semi-explicite Form wird die Singulärwertzerlegung von \mathbf{E} herangezogen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_{se} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{se}^T \quad \mathbf{T}_{se} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{se,1} & \mathbf{T}_{se,2} \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen \mathbf{S}_{se} und \mathbf{T}_{se} sind orthonormal. Ihre Inverse entspricht ihrer Transponierten.

Mit der Transformationsvorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{se,1}^T \\ \mathbf{T}_{se,2}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}_{se}^T \mathbf{x} \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^r \text{ und } \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$$

folgt durch Einsetzen in System (1.1) für die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{CT}_{se} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Du}$$

und für die Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{se} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{se}^T \mathbf{T}_{se} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{AT}_{se} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Bu} \\ \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma_r \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{se}^T \mathbf{AT}_{se} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{S}_{se}^T \mathbf{Bu}. \end{aligned}$$

Offensichtlich werden zur Berechnung von $\dot{\mathbf{x}}_1$ die ersten r Zeilen von $\mathbf{S}_{\text{se}}^T \mathbf{A} \mathbf{T}_{\text{se}}$ und $\mathbf{S}_{\text{se}}^T \mathbf{B}$ benötigt. Die restlichen $n - r$ Zeilen werden für die Berechnung der algebraischen Gleichungen verwendet.

Nach Definition folgender Abbildungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{se}}^T \mathbf{A} \mathbf{T}_{\text{se}} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{se}}^T \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{C} \mathbf{T}_{\text{se}}, \end{aligned}$$

lässt sich das Deskriptorsystem auf folgende Weise darstellen:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D} \mathbf{u}. \quad (2.11)$$

Diese Darstellungsweise wird semi-explizite Form genannt.

(2.9) beinhaltet die r Differentialgleichungen und (2.10) die $n - r$ algebraischen Gleichungen des Modells.

3 Robustheit der Eigenwerte

Nachdem im vorigen Kapitel Grundlagen von Deskriptorsystemen behandelt wurden, soll in diesem Kapitel die Störungstheorie für Deskriptorsysteme diskutiert werden. Aus dieser lässt sich eine Konditionszahl für die Robustheit der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises ableiten. Durch die Minimierung dieser Konditionszahl mittels der nach dem Reglerentwurf noch verfügbaren Freiheitsgrade, soll in späteren Kapiteln die Robustheit der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises erhöht werden.

Bei Deskriptorsystemen ergeben sich die Eigenwerte aus einem verallgemeinerten Eigenwertproblem, sodass die Störungstheorie für das gewöhnliche Eigenwertproblem nicht behandelt werden soll. Eine gute Einführung in die Thematik bietet z. B. das Buch von Wilkinson [24]. Wilkinson behandelt zwar nur die Störungstheorie für das gewöhnliche Eigenwertproblem, aber er wendet das Gerschgorin-Theorem an [6], um auch den Einfluss von Störungen auf mehrfache Eigenwerte untersuchen zu können. Das Gerschgorin-Theorem ermöglicht die Bestimmung von Kreisen, in denen sich die Eigenwerte einer Matrix befinden. Es lautet

Satz 3.1

Sei \mathbf{A} eine quadratische Matrix mit Einträgen aus \mathbb{C} . Dann ist der zum i -ten Diagonalelement a_{ii} von \mathbf{A} gehörende Gerschgorin-Kreis definiert durch seinen Mittelpunkt a_{ii} und seinen Radius \mathbf{a}_i . Der Radius berechnet sich aus $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$.

Eine Vereinigung von k Gerschgorin-Kreisen enthält genau k Eigenwerte, wenn sie von den anderen Gerschgorin-Kreisen getrennt ist.

Besonders einfach und aufschlussreich ist die Anwendung des Satzes auf eine Diagonalmatrix. Die Eigenwerte stünden auf der Hauptdiagonalen und wären gleichzeitig die Mittelpunkte der Gerschgorin-Kreise. Die Radien der Gerschgorin-Kreise wären allesamt null. Dieses Beispiel zeigt, dass Eigenwerte von Diagonalmatrizen die kleinsten Gerschgorin-Gebiete haben. Daher wird später auch die Transformation auf WKF für die Abschätzung der Eigenwerte verwendet.

Hätte die Matrix auch defekte Eigenwerte und läge in Jordanform vor, so wären die Gerschgorin-Radien wegen der Nebendiagonalelemente nicht mehr notwendigerweise null. Allerdings sind die Eigenwerte der transponierten Matrix gleich den Eigenwerten der Matrix, sodass die Gerschgorin-Kreise auch spaltenweise berechnet werden können. Somit wäre erst ab einem Jordanblock der Ordnung drei einer der Radien größer null. Nun schneiden sich aber die Kreise des dreifachen defekten Eigenwertes, da sie alle den gleichen Mittelpunkt haben. Laut Gerschgorin ist somit der größte Kreis die Abschätzung für die drei Eigenwerte, die eigentlich ein dreifacher defekter Eigenwert sind.

Wilkinson benutzt das Gerschgorin-Theorem, um eine Abschätzung der Eigenwerte einer gestörten Matrix zu erhalten. Er betrachtet einen Eigenwert und verkleinert den Radius des zugehörigen Gerschgorin-Kreises durch Transformationen, die die Eigenwerte der Matrix nicht verändern. Dabei achtet er darauf, dass der Kreis, dessen Radius er verkleinert, die anderen Kreise nicht schneidet. Dass sie sich schneiden, kann leicht geschehen, wenn die Radien der anderen Kreise wegen der Transformationen größer werden. Würden sich die Kreise aber schneiden, so wäre der betrachtete Eigenwert nicht mehr notwendigerweise in seinem Kreis, dessen Radius minimiert wird. Indem Wilkinson dies für jeden Eigenwert wiederholt, also für jede Zeile der Matrix, erhält er für alle Eigenwerte der gestörten Matrix recht gute Abschätzungen. Mit diesen Abschätzungen lässt sich eine maximal mögliche Entfernung eines jeden Eigenwertes der gestörten Matrix zum zugehörigen exakt bekannten Eigenwert der nicht gestörten Matrix berechnen. Daraus lässt sich wiederum eine Konditionszahl ableiten, die, wenn sie minimiert wird, diesen maximalen Abstand verkleinert und somit die Robustheit der Eigenwerte der Matrix gegenüber Störungen erhöht.

Wilkinsons Vorgehensweise wurde von Stewart [19] aufgegriffen und mithilfe des verallgemeinerten Gerschgorin-Theorems [7] (S. 65 ff.) und einer auf der Riemann-Sphäre basierenden Metrik auf das verallgemeinerte Eigenwertproblem übertragen. Das verallgemeinerte Gerschgorin-Theorem erlaubt die Abschätzung der Eigenwerte eines verallgemeinerten Eigenwertproblems. Um eine Konditionszahl ableiten zu können, wird eine Metrik für den Abstand zwischen nicht gestörtem und gestörtem Eigenwert benötigt. Da beim verallgemeinerten Eigenwertproblem unendliche Eigenwerte vorkommen können, muss auch ein Abstand zwischen endlichen und unendlichen Eigenwerten definiert werden. Zu diesem Zweck dient die Riemann-Sphäre.

In [20] wird das Verfahren ausführlicher behandelt als in [19]. Daher orientiert sich dieses Kapitel an [20]. Beweise der Sätze sind dort zu finden.

Im nächsten Abschnitt wird die Riemann-Sphäre eingeführt und aus ihr die chordale Metrik abgeleitet. Im zweiten Abschnitt des Kapitels wird das Gerschgorin-Theorem für das verallgemeinerte Eigenwertproblem behandelt. Der Einfachheit halber werden etwas größere Gebiete herangezogen, die aber leichter berechnet werden können und Kugelhauben der Riemann-Sphäre sind. Im dritten Abschnitt wird das Vorgehen zur Herleitung der Konditionszahl behandelt. Das Vorgehen wird einmal für die Untersuchung halbeinfacher Eigenwerte und einmal für die Untersuchung defekter Eigenwerte diskutiert. Halbeinfache Eigenwerte sind solche, deren geometrische Vielfachheit der algebraischen Vielfachheit entspricht. Ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes kleiner als die algebraische, so wird der Eigenwert als defekt bezeichnet [23] (S. 39). Für die Definition von algebraischer und geometrischer Vielfachheit vgl. Abschnitt 2.2.

Im fünften Abschnitt dieses Kapitels wird aus den n Konditionszahlen, es gibt eine für jeden Eigenwert, eine aggregierte Konditionszahl berechnet.

Der letzte Abschnitt behandelt Multi-Modell-Systeme für den Fall, dass für gewisse Parameterschwankungen sichergestellt werden soll, dass die Eigenwerte in einem gewissen Gebiet blei-

ben. Gerschgorin-Gebiete wären für diese Aufgabenstellung ebenfalls ein interessanter Ansatz. Allerdings ist zu vermuten, dass sie in den meisten Fällen ungeeignet wären, da die Abschätzung der Eigenwerte zu aufwendig oder zu ungenau wäre.

3.1 Die Metrik

Soll die Störung von Eigenwerten untersucht werden, so wird ein Maß für den Abstand zweier Eigenwerte voneinander benötigt. Hierzu wird die chordale Metrik herangezogen. Diese basiert auf der Riemann-Sphäre, welche ein Modell für die erweiterte komplexe Zahlenebene darstellt. Erweitert, weil zur komplexen Zahlenebene ein Punkt im Unendlichen hinzukommt. Sei im \mathbb{R}^3 die x - y -Ebene die komplexe Zahlenebene. Wird jeder Punkt auf der komplexen Zahlenebene mit dem Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ über eine Gerade verbunden, so schneiden diese Geraden die Einheitskugel. Diese Überlegung wird genutzt, um die komplexe Zahlenebene auf das kompakte Gebiet der Einheitskugel zu projizieren. Dafür wird den Schnittpunkten, ausgenommen $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, der jeweilige Wert der komplexen Zahlenebene zugeordnet. Der Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ repräsentiert eine unendlich große Zahl. Abbildung 3.1 visualisiert diesen Zusammenhang.

Seien die Schnittpunkte $s(\lambda)$. Dann ist die chordale Metrik χ zwischen zwei Punkten $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ definiert durch:

$$\chi(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2} \|s(\lambda) - s(\lambda')\|_2.$$

Es handelt sich dabei also um die halbe Länge der Sehne (lateinisch chorda), die die Projektionen der komplexen Punkte auf der Riemann-Sphäre verbindet. Mit $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ folgt

$$\chi\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \frac{|\alpha\beta' - \alpha'\beta|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \sqrt{|\alpha'|^2 + |\beta'|^2}}.$$

An Abbildung 3.1 lassen sich die Vor- und Nachteile der Metrik erkennen. Ein Vorteil ist, dass auch dem Punkt im Unendlichen ein endlicher Abstand zu den anderen Punkten zugewiesen wird. Damit ist auch der Abstand zwischen endlichen und unendlichen Eigenwerten definiert.

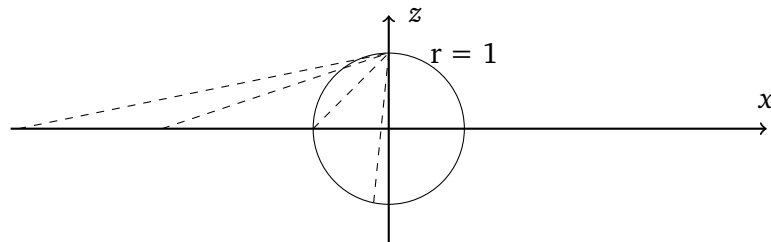


Abbildung 3.1.: Riemann-Sphäre

Dies ermöglicht die Anwendung des Verfahrens auf Störungen, die aus endlichen Eigenwerten unendliche machen und andersherum. Für Zahlen kleiner eins ähnelt die Metrik der euklidischen Metrik. Für große Zahlen allerdings entsteht eine Verzerrung. So können auch weit voneinander weg liegende große Zahlen kleine chordale Abstände haben. Dies ist der Preis dafür, dass mit unendlichen Werten umgegangen werden kann. Dieser Preis ist insofern nicht zu hoch, als dass meist insbesondere die Eigenwerte in der Nähe der Stabilitätsgrenze von Interesse sind.

3.2 Gerschgorin-Theorie

Das verallgemeinerte Gerschgorin-Theorem lautet [7] (S. 65 ff.)

Satz 3.2

Sei das Matrixpaar (\mathbf{A}, \mathbf{E}) regulär. Sei weiterhin

$$D_i = \left\{ (\alpha, \beta) : |\beta a_{ii} - \alpha e_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |\beta a_{ij} - \alpha e_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist das Spektrum des Matrixpaares:

$$\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{E}) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Weiterhin enthält eine Vereinigung von k Regionen D_i genau k Eigenwerte, wenn sie von den anderen Regionen getrennt ist.

Die Regionen D_i sind allerdings schwierig zu berechnen, da α und β auf beiden Seiten der Ungleichung vorkommen. Außerdem ist es schwierig sich diese Gebiete vorzustellen. Mit der Definition etwas größerer Regionen, lassen sich diese Probleme beheben.

Satz 3.3

Sei

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{i,i-1} & 0 & a_{i,i+1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} e_{i1} & \dots & e_{i,i-1} & 0 & e_{i,i+1} & \dots & e_{in} \end{pmatrix}$$

$$\rho_i = \sqrt{\frac{\|\mathbf{a}_i\|_1^2 + \|\mathbf{e}_i\|_1^2}{|a_{ii}|^2 + |e_{ii}|^2}}$$

$$G_i = \{(\alpha, \beta) : \chi((\alpha, \beta), (a_{ii}, e_{ii})) \leq \rho_i\}$$

dann gilt

$$D_i \subset G_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Die mittels Satz 3.3 definierten Regionen G_i beinhalten die eigentlichen Regionen des verallgemeinerten Gerschgorin-Theorems D_i . Somit beinhalten die Regionen G_i ebenfalls alle Eigenwerte des Matrixpaares. Und es gilt ebenfalls, dass die Vereinigung von k Regionen G_i genau k Eigenwerte beinhaltet, wenn sie von den anderen Regionen getrennt ist. Im Folgenden werden auch die Regionen G_i Gerschgorin-Regionen genannt. ρ_i kann offensichtlich als eine Art chordaler Radius angesehen werden: Alle Punkte (α, β) , deren chordaler Abstand von dem Punkt (a_{ii}, e_{ii}) kleiner ist als ρ gehören zum Gerschgorin-Gebiet G_i dazu. Damit sind die Regionen G_i Kugelhauben der Riemann-Sphäre, oder eben deren Rückprojektion auf die erweiterte komplexe Zahlenebene.

3.3 Herleitung der Konditionszahl

Im folgenden Abschnitt 3.3.1 sollen die mittels der Gerschgorin-Regionen zu untersuchenden Eigenwerte halbeinfach sein. Dies heißt nicht, dass alle Eigenwerte des Systems halbeinfach sein müssen. Der Einfachheit halber wird im ersten Abschnitt aber mit einem System ohne defekte Eigenwerte begonnen, da dann \mathbf{A} und \mathbf{E} diagonalisierbar sind. Im Anschluss werden die halbeinfachen Eigenwerte eines Systems untersucht, das auch defekte Eigenwerte hat. Im zweiten Abschnitt 3.3.2 wird das Verfahren für die Untersuchung der defekten Eigenwerte diskutiert.

3.3.1 Halbeinfache Eigenwerte

Hat ein reguläres Deskriptorsystem nur halbeinfache Eigenwerte, dann existieren die Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{J} , sodass (vgl. Abschnitt 2.3)

$$\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{J} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

$$\mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{J} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Angenommen es liegt ein k -facher halbeinfacher Eigenwert vor $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$. Sei weiterhin

$$\delta = \min_{k < i \leq n} \chi(\lambda_1, \lambda_i)$$

$$v_i = \frac{\|\mathbf{h}_i\|_2 \|\mathbf{j}_i\|_2}{\sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}}$$

$$v = \max_{1 \leq i \leq k} v_i$$

$$v' = \max_{k < i \leq n} v_i.$$

Der Index i bezieht sich bei \mathbf{h}_i auf die Zeile und bei \mathbf{j}_i auf die Spalte der Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{J} .

Nun werden die gestörten Matrizen $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{E}}) = (\mathbf{M} + \mathbf{S}_1, \mathbf{E} + \mathbf{S}_2)$ untersucht. Um die Thematik nicht zu verkomplizieren, wird von einem Beispiel ausgegangen, bei dem $k = 3$ und $n = 5$ sein soll.

Sei $\varepsilon = \max \{ \|\mathbf{S}_1\|_2, \|\mathbf{S}_2\|_2 \}$ eine obere Grenze für die Störung. Außerdem sei

$$\gamma_{ij} = \mathbf{h}_i \mathbf{S}_1 \mathbf{j}_j$$

$$\xi_{ij} = \mathbf{h}_i \mathbf{S}_2 \mathbf{j}_j.$$

Dann ist

$$\mathbf{H}(\mathbf{A} + \mathbf{S}_1) \mathbf{J} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_5) + \mathbf{\Gamma}^{5 \times 5}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{E} + \mathbf{S}_2) \mathbf{J} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_5) + \mathbf{\Xi}^{5 \times 5}.$$

Wenn die i -te Zeile einer Matrix mit einem beliebigen Faktor m und die i -te Spalte mit $1/m$ multipliziert wird, ändern sich die Eigenwerte der Matrix nicht. Sei \mathbf{T} eine Diagonalmatrix, auf deren ersten k Hauptdiagonaleinträgen τ und auf den restlichen $n - k$ Hauptdiagonaleinträgen Einsen stehen.

Damit entspricht folgende Transformation

$$\mathbf{TH}(\mathbf{A} + \mathbf{S}_1) \mathbf{JT}^{-1}$$

$$\mathbf{TH}(\mathbf{E} + \mathbf{S}_2) \mathbf{JT}^{-1}$$

der Multiplikation der Zeilen $k + 1, \dots, n$ mit τ^{-1} und der Multiplikation der Spalten $k + 1, \dots, n$ mit τ . Diese Transformation ändert die Eigenwerte des Matrixpaares also nicht.

Es folgt:

$$\mathbf{TH}(\mathbf{A} + \mathbf{S}_1) \mathbf{JT}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \tau \gamma_{14} & \tau \gamma_{15} \\ \gamma_{21} & \alpha_2 + \gamma_{22} & \gamma_{23} & \tau \gamma_{24} & \tau \gamma_{25} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \alpha_3 + \gamma_{33} & \tau \gamma_{34} & \tau \gamma_{35} \\ \tau^{-1} \gamma_{41} & \tau^{-1} \gamma_{42} & \tau^{-1} \gamma_{43} & \alpha_4 + \gamma_{44} & \gamma_{45} \\ \tau^{-1} \gamma_{51} & \tau^{-1} \gamma_{52} & \tau^{-1} \gamma_{53} & \gamma_{54} & \alpha_5 + \gamma_{55} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{TH}(\mathbf{E} + \mathbf{S}_2) \mathbf{JT}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \tau \xi_{14} & \tau \xi_{15} \\ \xi_{21} & \beta_2 + \xi_{22} & \xi_{23} & \tau \xi_{24} & \tau \xi_{25} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \beta_3 + \xi_{33} & \tau \xi_{34} & \tau \xi_{35} \\ \tau^{-1} \xi_{41} & \tau^{-1} \xi_{42} & \tau^{-1} \xi_{43} & \beta_4 + \xi_{44} & \xi_{45} \\ \tau^{-1} \xi_{51} & \tau^{-1} \xi_{52} & \tau^{-1} \xi_{53} & \xi_{54} & \beta_5 + \xi_{55} \end{pmatrix}$$

Nun werden die Radien der Gerschgorin-Gebiete mithilfe von Satz 3.3 betrachtet. Für bspw. $i = 1$ und $i = 4$ folgt:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{(|\gamma_{12}| + |\gamma_{13}| + |\tau \gamma_{14}| + |\tau \gamma_{15}|)^2 + (|\xi_{12}| + |\xi_{13}| + |\tau \xi_{14}| + |\tau \xi_{15}|)^2}{|\alpha_1 + \gamma_{11}|^2 + |\beta_1 + \xi_{11}|^2}}$$

$$\rho_4 = \sqrt{\frac{\left(\left|\frac{\gamma_{41}}{\tau}\right| + \left|\frac{\gamma_{42}}{\tau}\right| + \left|\frac{\gamma_{43}}{\tau}\right| + |\gamma_{45}|\right)^2 + \left(\left|\frac{\xi_{41}}{\tau}\right| + \left|\frac{\xi_{42}}{\tau}\right| + \left|\frac{\xi_{43}}{\tau}\right| + |\xi_{45}|\right)^2}{|\alpha_4 + \gamma_{44}|^2 + |\beta_4 + \xi_{44}|^2}}.$$

Für den mehrfachen Eigenwert, das heißt für $i = 1, \dots, k$, ähneln sich die Radien, da α_i und β_i identisch sind. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Indizes von γ und ξ . Für die anderen Eigenwerte gilt dies offensichtlich nicht.

Es lässt sich zeigen [20] (S. 299), dass

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &= 0 & i &= 1, \dots, k \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &< \frac{\sqrt{2}k\nu'\varepsilon}{\tau} & i &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Somit liegt für kleine Störungen ε eine gute Abschätzung für den k -fachen Eigenwert vor, wenn zusätzlich sichergestellt wird, dass die anderen Regionen die Regionen des k -fachen Eigenwertes nicht schneiden.

Mit der Wahl

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}k\nu'\varepsilon}{\delta}$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i < \frac{\delta}{2} \quad i = k+1, \dots, n.$$

Da $\delta = \min_{k < i \leq n} \chi(\lambda_1, \lambda_i)$ der Abstand des mehrfachen Eigenwertes zum nächsten anderen Eigenwert ist, können die Regionen des mehrfachen Eigenwertes für ausreichend kleine ε die anderen Regionen nicht schneiden. Somit beinhaltet die Vereinigungsmenge der ersten k Regionen genau k Eigenwerte.

Es lässt sich zeigen, dass bei $\tau = \frac{2\sqrt{2}k\nu'\varepsilon}{\delta}$ die chordalen Radien der Regionen $i = 1, \dots, k$ bei Vernachlässigung der Terme ε^n , $n > 1$ [20] (S. 299) kleiner sind als $\sqrt{2}(k-1)\nu\varepsilon$.

Außerdem lässt sich zeigen, dass für den chordalen Abstand zwischen nicht gestörtem Eigenwert und Mittelpunkt der Gerschgorin-Region des zugehörigen gestörten Eigenwertes

$$\chi([\alpha_i, \beta_i], [\alpha_i + \gamma_{ii}, \beta_i + \xi_{ii}]) \leq \sqrt{2}\nu\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

gilt.

Damit kann der Abstand zwischen gestörtem und nicht gestörtem Eigenwert unter Vernachlässigung der Terme ε^n , $n > 1$ maximal

$$\chi([\alpha_i, \beta_i], [\alpha'_i, \beta'_i]) \leq \sqrt{2}(k-1)\nu\varepsilon + \sqrt{2}\nu\varepsilon = \sqrt{2}k\nu\varepsilon$$

betragen.

Da diese obere Schranke für den chordalen Abstand zwischen gestörtem und nicht gestörtem Eigenwert proportional von ν abhängt, lässt sich die Robustheit der Eigenwerte erhöhen, indem ν verkleinert wird. Damit kann ν als Konditionszahl für die Robustheit der Eigenwerte des Matrixpaares interpretiert werden. Offensichtlich hängt die Robustheit aber auch von der Mehrfachheit k des Eigenwertes ab. Umso größer k wird, umso weniger robust ist der Eigenwert bei gleicher Konditionszahl ν .

Für nicht diagonalisierbare Matrizen gibt es nach Transformation auf WKF zusätzliche Werte auf den Nebendiagonalen der Matrizen. Diese Werte unterliegen allerdings einer beliebigen Normierung und lassen sich über eine Ähnlichkeitstransformation verkleinern. Zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \zeta & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \zeta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Umso kleiner ζ gewählt wird, desto schlechter ist die Transformation allerdings konditioniert.

Da der zu untersuchende Eigenwert halbeinfach ist, sind seine Regionen mit denen aus dem vorigen Abschnitt identisch. Die zusätzlichen von den defekten Eigenwerten herrührenden Werte auf der Nebendiagonale verändern ausschließlich die Radien der Regionen $i = k + 1, \dots, n$. Dies führt bei einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation nach (3.1) aber nicht dazu, dass die ersten k Regionen für kleine ε die anderen Regionen schneiden. Daher ist die Regularität der Eigenvektormatrix für dieses Verfahren nicht notwendig.

Es lässt sich bereits antizipieren, dass das Verfahren mithilfe der Transformation (3.1) auch für die Abschätzung defekter Eigenwerte verwendet werden kann. Trotzdem soll auf die Untersuchung der defekten Eigenwerte im folgenden Abschnitt genauer eingegangen werden.

3.3.2 Defekte Eigenwerte

Angenommen es liegt ein k -facher defekter Eigenwert vor $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$. Dann sei wie gehabt

$$\begin{aligned} \delta &= \min_{k < i \leq n} \chi(\lambda_1, \lambda_i) \\ v_i &= \frac{\|\mathbf{h}_i\|_2 \|\mathbf{j}_i\|_2}{\sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}} \\ v &= \max_{1 \leq i \leq k} v_i \\ v' &= \max_{k < i \leq n} v_i. \end{aligned}$$

Die WKF wird wie in (3.1) gezeigt transformiert, sodass die Nebendiagonalelemente mit $\frac{\sqrt{2}\delta}{3m}$ multipliziert werden. Dabei soll m das größte Nebendiagonalelement sein. Es soll erneut als Beispiel $k = 3$, $n = 5$ gelten. Die Nebendiagonalelemente werden mit $\alpha_{i,N}$, $\beta_{i,N}$, $i = 1, \dots, k -$

1 bezeichnet. Zusätzlich wird nun zwischen endlichem und unendlichem k -fachen defektem Eigenwert unterschieden. Für unendliche oder endliche defekte Eigenwerte gilt Tabelle 3.1 [5] (S. 376).

Tabelle 3.1.: α , β und Nebendiagonalelemente für defekte Eigenwerte

$\lambda_{i,e}$	$\alpha_i \neq 0$	$\alpha_{i,N} \neq 0$	$\beta_i = 1$	$\beta_{i,N} = 0$
$\lambda_{i,\infty}$	$\alpha_i = 1$	$\alpha_{i,N} = 0$	$\beta_i = 0$	$\beta_{i,N} \neq 0$

Also folgt für einen endlichen k -fachen defekten Eigenwert:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{A} + \mathbf{S}_1)\mathbf{JT} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_{11} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}(\alpha_{1,N} + \gamma_{12}) & \gamma_{13} & \tau\gamma_{14} & \tau\gamma_{15} \\ \gamma_{21} & \alpha_2 + \gamma_{22} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}(\alpha_{2,N} + \gamma_{23}) & \tau\gamma_{24} & \tau\gamma_{25} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \alpha_3 + \gamma_{33} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\tau\gamma_{34} & \tau\gamma_{35} \\ \tau^{-1}\gamma_{41} & \tau^{-1}\gamma_{42} & \tau^{-1}\gamma_{43} & \alpha_4 + \gamma_{44} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\gamma_{45} \\ \tau^{-1}\gamma_{51} & \tau^{-1}\gamma_{52} & \tau^{-1}\gamma_{53} & \gamma_{54} & \alpha_5 + \gamma_{55} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{E} + \mathbf{S}_2)\mathbf{JT} = \begin{pmatrix} 1 + \xi_{11} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\xi_{12} & \xi_{13} & \tau\xi_{14} & \tau\xi_{15} \\ \xi_{21} & 1 + \xi_{22} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\xi_{23} & \tau\xi_{24} & \tau\xi_{25} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 1 + \xi_{33} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\tau\xi_{34} & \tau\xi_{35} \\ \tau^{-1}\xi_{41} & \tau^{-1}\xi_{42} & \tau^{-1}\xi_{43} & \beta_4 + \xi_{44} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\xi_{45} \\ \tau^{-1}\xi_{51} & \tau^{-1}\xi_{52} & \tau^{-1}\xi_{53} & \xi_{54} & \beta_5 + \xi_{55} \end{pmatrix}.$$

Für einen unendlichen k -fachen defekten Eigenwert folgt:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{A} + \mathbf{S}_1)\mathbf{JT} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_{11} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\gamma_{12} & \gamma_{13} & \tau\gamma_{14} & \tau\gamma_{15} \\ \gamma_{21} & 1 + \gamma_{22} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\gamma_{23} & \tau\gamma_{24} & \tau\gamma_{25} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 + \gamma_{33} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\tau\gamma_{34} & \tau\gamma_{35} \\ \tau^{-1}\gamma_{41} & \tau^{-1}\gamma_{42} & \tau^{-1}\gamma_{43} & \alpha_4 + \gamma_{44} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\gamma_{45} \\ \tau^{-1}\gamma_{51} & \tau^{-1}\gamma_{52} & \tau^{-1}\gamma_{53} & \gamma_{54} & \alpha_5 + \gamma_{55} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{E} + \mathbf{S}_2)\mathbf{JT} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}(\beta_{1,N} + \xi_{12}) & \xi_{13} & \tau\xi_{14} & \tau\xi_{15} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}(\beta_{2,N} + \xi_{23}) & \tau\xi_{24} & \tau\xi_{25} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\tau\xi_{34} & \tau\xi_{35} \\ \tau^{-1}\xi_{41} & \tau^{-1}\xi_{42} & \tau^{-1}\xi_{43} & \beta_4 + \xi_{44} & \frac{\sqrt{2}\delta}{3m}\xi_{45} \\ \tau^{-1}\xi_{51} & \tau^{-1}\xi_{52} & \tau^{-1}\xi_{53} & \xi_{54} & \beta_5 + \xi_{55} \end{pmatrix}.$$

Im Vergleich zu Systemen ohne defekte Eigenwerte ändern sich also lediglich die Radien der Regionen, in denen die defekten Eigenwerte sich befinden. Da δ von ε unabhängig ist, γ und ξ aber von ε abhängen, gilt bei Wahl von τ wie im Abschnitt zuvor ($\tau = \frac{2\sqrt{2}kv'\varepsilon}{\tau}$):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &= \sqrt{0 + \frac{\left| \frac{\sqrt{2}\delta}{3m} \alpha_{i,N} \right|^2}{|\alpha_i + \gamma_{ii}|^2 + |1 + \xi_{ii}|^2}} \leq \sqrt{\frac{2\delta^2}{9(|\alpha_i|^2 + 1)}} & i = 1, \dots, k-1 \quad \lambda_i \neq \infty \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &= \sqrt{0 + \frac{\left| \frac{\sqrt{2}\delta}{3m} \beta_{i,N} \right|^2}{|1 + \gamma_{ii}|^2 + |\xi_{ii}|^2}} \leq \sqrt{\frac{2\delta^2}{9}} & i = 1, \dots, k-1 \quad \lambda_i = \infty \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &= 0 & i = k \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_i &< \frac{\sqrt{2}kv'\varepsilon}{\tau} = \frac{\delta}{2} & i = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Entscheidend ist, dass sich die ersten k Regionen nicht mit den anderen Regionen schneiden. Die obere Schranke des Radius für defekte endliche Eigenwerte ist dann am größten, wenn $\alpha_i = 0$ gilt. Dann sind die oberen Schranken für die Radien der Regionen für defekte endliche und unendliche Eigenwerte gleichgroß. Interessanterweise ist der endliche Eigenwert dann gleich null und nimmt auf der Riemann-Sphäre den Punkt ein, der dem Punkt für unendliche Werte gegenüberliegt. Wegen $\sqrt{2}/3 = 0,47 < 0,5$ schneiden sich die Gebiete der defekten Eigenwerte für kleine ε nicht mit den anderen Gebieten. Schließlich ist δ definiert als der kleinste Abstand zwischen dem k -fachen Eigenwert und den restlichen Eigenwerten. Der Radius der Regionen des k -fachen Eigenwertes ist kleiner als $\delta/2$ und die Radien der anderen Eigenwerte sind es ebenfalls. Damit ist eine Schnittmenge ausgeschlossen.

Da der vergrößerte Radius durch die Nebendiagonale nicht dazu führt, dass die Regionen sich überschneiden, lässt sich zur Optimierung der Robustheit erneut die gleiche Konditionszahl verwenden wie im Abschnitt zuvor. Allerdings sind defekte Eigenwerte notwendigerweise weniger robust, da ihre Gerschgorin-Radien größer sind als die von halbeinfachen Eigenwerten. Daher ist es von diesem Gesichtspunkt aus sinnvoll, bei der Polvorgabe möglichst verschiedene Eigenwerte vorzugeben, um zu vermeiden, dass der geschlossene Regelkreis defekte Eigenwerte enthält.

Kommen weitere defekte Eigenwerte hinzu, so müssen diese Überlegungen nicht mehr stimmen. Im schlimmsten Fall ist der Eigenwert, der dem betrachteten defekten Eigenwert am nächsten ist, selbst defekt. Dann definiert ihr Abstand δ und nicht nur die Radien der Gerschgorin-Regionen des betrachteten defekten Eigenwertes vergrößern sich, sondern auch die Radien der Regionen, die zum nächsten Eigenwert gehören. In diesem Fall kann es dazu kommen, dass die Gebiete sich überschneiden. Dem kann entgegengewirkt werden, indem die Nebendiagonalelemente mittels der Transformation (3.1) noch kleiner gemacht werden, was aber wiederum die

Kondition der Transformation verschlechtert. Auf diesen Fall soll aber nicht weiter eingegangen werden. Stattdessen wird sich mit der Minimierung der Konditionszahl

$$v_i = \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\|\mathbf{h}_i\|_2 \|\mathbf{j}_i\|_2}{\sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}}$$

für einen auch defekten Eigenwert zufrieden gegeben. Dies ist insbesondere gerechtfertigt, da die Gerschgorin-Regionen in der Praxis für die Verbesserung der Robustheit nicht berechnet werden und die schlechte Kondition der Transformation (3.1) daher in der Praxis keine Rolle spielt.

Stattdessen sind in der Praxis die numerischen Schwierigkeiten bei der Berechnung von \mathbf{H} und \mathbf{J} relevant. Inwieweit diese sich auf die Konditionszahl auswirken, soll hier aber nicht weiter untersucht werden.

3.4 Aggregierte Konditionszahl

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, dass v_i eine Konditionszahl für den i -ten Eigenwert ist. Da n Eigenwerte existieren, liegen n Konditionszahlen vor. Diese sollen nun in einer aggregierten Konditionszahl zusammengefasst werden, da es einfacher ist, eine Zahl zu minimieren als mehrere.

Dazu wird wie in [9] (S. 24-25) vorgegangen. Es wird also eine gewichtete Summe der Konditionszahlen der einzelnen Eigenwerte herangezogen:

$$v_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n g_i v_i. \quad (3.2)$$

$$\text{Dabei sei: } v_i = \max_j \left\{ \frac{\|\mathbf{h}_j\|_2 \|\mathbf{j}_j\|_2}{\sqrt{|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2}} \right\} \text{ für } \lambda_i = \lambda_j.$$

Außerdem sollen alle Gewichte g_i in der Summe eins ergeben

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1$$

und ein mehrfacher Eigenwert soll nicht mit unterschiedlichen Gewichten bewertet werden

$$g_i = g_j \text{ für } \lambda_i = \lambda_j.$$

So können weniger kritische Eigenwerte, also solche die bereits sehr weit links der $j\omega$ -Achse liegen, als weniger wichtig eingestuft werden, während Eigenwerten in der Nähe der Stabilitätsgrenze ein hohes Gewicht zugeordnet werden kann. Auch der Fall, dass nur die Kondition eines einzelnen Eigenwertes berücksichtigt werden soll, ist mit entsprechender Wahl der Gewichte zu null in dieser ganzheitlichen Konditionszahl enthalten. Durch die Wahl der entsprechenden Gewichte zu null lassen sich auch die sowieso nicht verschiebbaren nichtdynamischen Modi aus der Untersuchung ausklammern.

3.5 Multi-Modell-Systeme

Mithilfe der Konditionszahlen lässt sich eine Aussage darüber treffen, wie empfindlich die Pole des Systems gegenüber Änderungen in den Systemparametern sind. Ein auf diesen Zahlen basierendes Vorgehen stellt aber ohne weitere Überprüfung nicht sicher, dass die Eigenwerte für vordefinierte Parameteränderungen in einem vorgegebenen Bereich Γ bleiben. Diese Eigenschaft, dass die Pole bei vordefinierten Parameteränderungen in Γ bleiben, wird Γ -Stabilität genannt [4] (S. 566). Diese lässt sich mittels Multi-Modell-Systemen prüfen. Denkbar wäre auch ein Ansatz mittels Gerschgorin-Gebiete. Dies würde allerdings bedeuten, dass die gesamten Gerschgorin-Gebiete in Γ liegen müssten, was dazu führen würde, dass entweder eigentlich Γ -stabile Systeme nicht als solche erkannt würden, oder dass man viel Aufwand betreiben müsste, um die Gerschgorin-Gebiete durch Transformationen kleiner zu machen.

Die herkömmliche Nutzung von Multi-Modell-Systemen ist der Reglerentwurf Γ -stabiler Regler. Es ist aber auch möglich andersherum vorzugehen und für einen Regler zu prüfen, für welche Parameteränderungen die Pole des geschlossenen Regelkreises im Bereich Γ bleiben.

Sei B der Bereich, in dem die Systemparameter sich bewegen dürfen und Γ der Bereich, in dem die Pole für alle Parameterkonfigurationen, die B ermöglicht, bleiben sollen. Nun werden aus B alle signifikanten Punkte $\Theta_1, \dots, \Theta_m$ ausgewählt und die zugehörigen m Modelle bestimmt. Weil es m Modelle sind, wird von Multi-Modell-Systemen gesprochen.

Nun liegt die Aufgabe darin zu überprüfen, ob die Eigenwerte des mit dem Regler geschlossenen Regelkreises für alle m Modelle im Bereich Γ liegen. Diese Vorgehensweise fundiert auf der Annahme, dass die gewünschten Eigenschaften, wenn sie für alle m Modelle zutreffen, auch für alle anderen mit B realisierbaren Modelle gelten. Diese Annahme ist durch die Stetigkeit der Matrixfunktion $A(\Theta)$ motiviert. Sie ist aber nicht gesichert. Vgl. zu diesem Abschnitt [4] (S. 567 f.).

Eine iterative Veränderung von B ermöglicht es einem dann, die im Betrieb erlaubten Parameterschwankungen zu bestimmen.

4 Entwurf von Ausgangsrückführungen für Deskriptorsysteme

In Kapitel 2 wurden die notwendigen Grundlagen zu Deskriptorsystemen behandelt und in Kapitel 3 wurde eine Konditionszahl für die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises gefunden. Nun soll das Reglerentwurfsverfahren aus [15] diskutiert werden, das nicht nur die Vorgabe aller verschiebbaren Pole ermöglicht, sondern auch die für die Polvorgabe nicht benötigten Freiheitsgrade aufdeckt, womit sie für die Erhöhung der Robustheit genutzt werden können.

Um das Verfahren anwenden zu können, muss das System die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{4.1}$$

aufweisen. Das Verfahren setzt weiterhin voraus, dass für dieses System eine statische Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{w} \tag{4.2}$$

entworfen werden soll.

Damit Systeme mit Durchgriff trotzdem behandelt werden können, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels eine Erweiterung des Systems (1.1) vorgestellt, die den Durchgriff eliminiert und das System auf die für den Reglerentwurf notwendige Form (4.1) transformiert.

Damit alle verschiebbaren Pole vorgegeben werden können, müssen genug Freiheitsgrade in Form der unabhängigen Ein- und Ausgänge des Systems vorhanden sein. Daher wird im zweiten Abschnitt des Kapitels die Bestimmung ebendieser diskutiert.

Im dritten Abschnitt wird ein Kriterium behandelt, das dazu befähigt zu erkennen, ob genug Freiheitsgrade für die Vorgabe aller verschiebbaren Eigenwerte vorhanden sind. Sollten nicht genug Freiheitsgrade vorhanden sein, so werden diese durch den Entwurf einer dynamischen Rückführung erzeugt. Es wird ein Kriterium für die notwendige dynamische Ordnung des Reglers angegeben. Da aber dann der Regler nicht mehr die Form (4.2) hat, wird eine Erweiterung des Systems diskutiert, die den Entwurf einer dynamischen Ausgangsrückführung auf den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung zurückführt, indem die Dynamik des Reglers in die Dynamik des erweiterten Systems integriert wird.

Die ersten drei Abschnitte ermöglichen also die Rückführung von Systemen mit Durchgriff und Systemen mit dynamischer Ausgangsrückführung immer und ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf die Form (4.1), (4.2). Dabei wird sichergestellt, dass immer genug Freiheitsgrade

für die Vorgabe aller verschiebbaren Eigenwerte vorhanden sind. Daher kann als Ausgangspunkt des Reglerentwurfsverfahrens auch ohne Einschränkung der Allgemeinheit von einem System der Form (4.1) ausgegangen werden, für das eine statische Rückführung (4.2) zu entwerfen ist. Die restlichen Abschnitte des Kapitels behandeln den eigentlichen Regler- und Vorfilterentwurf.

4.1 Eliminierung der Durchgriffsmatrix

Da das Entwurfsverfahren ein System der Form (4.1) voraussetzt, wird im Folgenden eine Erweiterung des Systems behandelt, welche die Eliminierung der Durchgriffsmatrix ermöglicht. Dazu wird $\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ definiert und System (1.1) zum gleichwertigen System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_e} \dot{\mathbf{x}}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{x}_e + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_e} \mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_e} \mathbf{x}_e$$

$$\mathbf{E}_e \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e \qquad (4.3)$$

umgeschrieben [15] (S. 68).

Dann gilt für die Dimensionen der Matrizen: $\mathbf{E}_e \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $\mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{(n+q) \times p}$ und $\mathbf{C}_e \in \mathbb{R}^{q \times (n+q)}$.

Für ein reguläres System (1.1) folgt wegen der Blockdiagonalstruktur der Matrizen \mathbf{A}_e und \mathbf{E}_e die Regularität des Systems (4.3) [15] (S. 68).

Somit kann ein System mit Durchgriff auf ein System ohne Durchgriff zurückgeführt werden, sodass trotz der Bedingung, dass das System die Form (4.1) habe, das Reglerentwurfsverfahren auch auf Systeme mit Durchgriff anwendbar ist.

4.2 Unabhängige Ein- und Ausgänge

Die Anzahl der unabhängigen Ein- und Ausgänge des Deskriptorsystems seien \check{p} und \check{q} . Anders als bei klassischen Zustandsraumsystemen können \check{p} und \check{q} nicht über $\text{rg}(\mathbf{B})$ und $\text{rg}(\mathbf{C})$ bestimmt werden, da es algebraische Abhängigkeiten zwischen den Deskriptorvariablen geben kann.

Um dies zu veranschaulichen, wird ein System in SEF betrachtet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2.\end{aligned}$$

Wegen

$$\text{rg}(\mathbf{B}) = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} = 2$$

hat es den Anschein, als habe das System zwei unabhängige Eingänge. Die algebraischen Koppelungsbedingungen zeigen aber, dass die beiden Stellgrößen den beiden ersten Einträgen von \mathbf{x}_1 bis auf das Vorzeichen entsprechen: $x_{11} = -u_1$ und $x_{12} = -u_2$. Eine Umformulierung der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x_{21} &= \dot{x}_{11} = -\dot{u}_1 \\ x_{22} &= \dot{x}_{12} - u_1 = -\dot{u}_2 - u_1 \\ \dot{x}_{13} &= x_{11} + x_{14} + u_1 = x_{14} \\ \dot{x}_{14} &= x_{13} + u_1 + u_2\end{aligned}$$

zeigt, dass u_1 und u_2 zwar unabhängig voneinander auf das Deskriptorsystem wirken, auf die Zustände der Differentialgleichung kann jedoch nur über $u_1 + u_2$ Einfluss genommen werden. Damit sind die Eingänge bei Einflussnahme auf die langsame Dynamik voneinander abhängig.

Dieser Sachverhalt lässt sich durch ein Beispiel veranschaulichen. Es liegen zwei Scheiben vor, für die es jeweils einen Aktor gibt. Diese Scheiben seien starr miteinander gekoppelt. Trotz des zweiten Aktors kann dem System wegen der Kopplung keine andere Dynamik aufgeprägt werden, als dies bereits mit dem ersten Aktor möglich ist.

Zur Definition von \check{p} und \check{q} wird ein maximales, vollständig steuer- und beobachtbares Teilsystem abgespalten. Fast jede Ausgangsrückführung verschiebt die unendlichen Eigenwerte dieses Teilsystems ins Endliche. Nun wird das abgespaltene Teilsystem mit einer zufälligen Ausgangsrückführung geschlossen und in die spezielle WKF

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{v,1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{v,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v,1} \\ \mathbf{x}_{v,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{v,1} \\ \mathbf{B}_{v,2} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{v,1} & \mathbf{C}_{v,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v,1} \\ \mathbf{x}_{v,2} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.4}$$

transformiert.

Dann ist (für fast alle Ausgangsrückführungen)

$$\check{p} = \text{rg}(\mathbf{B}_{v,1}) \qquad \check{q} = \text{rg}(\mathbf{C}_{v,1}).$$

Denn die erste Zeile von (4.4) entspricht dann einem klassischen Zustandsraumssystem, für das das Rang-Kriterium gilt.

Die Abspaltung kann aber aufwendig sein, sodass sich in der Praxis zur Bestimmung von \check{p} und \check{q} eine andere Vorgehensweise empfiehlt [15] (S. 71-72). Diese wird nun behandelt.

Das Eigenwertproblem zu (4.4) besitzt n_v linear unabhängige Rechts- und Linkseigenvektoren zu den n_v endlichen Eigenwerten. Diese haben die Form $\mathbf{v}_{v,i}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{v,1i}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w}_{v,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{v,1i} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Daher gilt auch $\check{q} = \text{rg}(\mathbf{C}_v \mathbf{V}_v) = \text{rg}(\mathbf{C}_{v,1})$ sowie $\check{p} = \text{rg}(\mathbf{W}_v \mathbf{B}_v) = \text{rg}(\mathbf{B}_{v,1})$.

Das System wird mit einer beliebigen Ausgangsrückführung rückgekoppelt. Falls diese Rückführung zu n_v endlichen Eigenwerten des geschlossenen Regelkreises führt, die nicht der Menge der Eigenwerte des offenen Regelkreises angehören, lassen sich \check{p} und \check{q} über

$$\begin{aligned} \check{p} &= \text{rg}(\mathbf{W}_{n_v} \mathbf{B}) \\ \check{q} &= \text{rg}(\mathbf{C} \mathbf{V}_{n_v}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

bestimmen. \mathbf{W}_{n_v} und \mathbf{V}_{n_v} sind die Eigenvektormatrizen des geschlossenen Regelkreises, die sich aus den Eigenvektoren zusammensetzen, die zu den n_v Eigenwerten gehören.

4.3 Entwurf dynamischer Ausgangsrückführungen

4.3.1 Bestimmung der dynamischen Ordnung

Durch den Reglerentwurf sollen alle n_v verschiebbaren Eigenwerte vorgegeben werden. Dies ist bei einer statischen Ausgangsrückführung möglich, wenn

$$\check{p} + \check{q} \geq n_v + 1 \tag{4.6}$$

erfüllt ist [2] (S. 529), wobei \check{p} und \check{q} die linear unabhängige Anzahl an Ein- und Ausgängen ist. Wie \check{p} und \check{q} bestimmt werden können, ist in Abschnitt 4.2 beschrieben.

Wenn (4.6) nicht erfüllt ist, soll ein dynamischer Regler (1.3) entworfen werden, der mindestens die Freiheitsgrade zur Verfügung stellt, die noch für die Polvorgabe benötigt werden. Die dafür notwendige dynamische Ordnung n_d des Reglers lässt sich anhand von

$$\check{p} + n_d + \check{q} \geq n_v + 1 \tag{4.7}$$

berechnen.

Nun setzt aber das Reglerentwurfsverfahren ein System der Form (4.1) voraus. In diesem ist kein dynamischer Regler vorgesehen. Daher wird im nächsten Abschnitt eine Transformation diskutiert, die die Reglerdynamik in die Systemdynamik integriert und somit den Entwurf einer dynamischen Rückführung auf den Entwurf einer statischen Rückführung für ein System der Form (4.1) zurückführt.

4.3.2 Zurückführung auf den Entwurf statischer Ausgangsrückführungen

Für den Fall, dass eine dynamische Ausgangsrückführung entworfen werden soll, wird dies auf den Entwurf einer statischen Ausgangsrückführung zurückgeführt (vgl. z. B. [4] (S. 532-533)). Ausgangspunkt sei ein gemäß Abschnitt 4.1 erweitertes System.

Nun wird das System (4.3) und das dynamische Regelungsgesetz (1.3) zusammengefasst

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e \\ \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{D}_d \mathbf{C}_e & \mathbf{B}_e \mathbf{C}_d \\ \mathbf{B}_d \mathbf{C}_e & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$

und die Dynamik

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e \\ \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{de} \dot{\mathbf{x}}_{de} &= \mathbf{A}_{de} \mathbf{x}_{de} + \mathbf{B}_{de} \mathbf{u}_{de} \\ \mathbf{y}_{de} &= \mathbf{C}_{de} \mathbf{x}_{de} \end{aligned} \tag{4.8}$$

von der zu entwerfenden statischen Ausgangsrückführung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u}_{de} &= \mathbf{R}_{de} \mathbf{y}_{de} + \mathbf{F}_{de} \mathbf{w} \end{aligned} \tag{4.9}$$

getrennt.

Für die Matrizen folgen aus der Transformation die Dimensionen $\mathbf{E}_{de}, \mathbf{A}_{de} \in \mathbb{R}^{(n+q+n_d) \times (n+q+n_d)}$, $\mathbf{B}_{de} \in \mathbb{R}^{(n+q+n_d) \times (p+n_d)}$, $\mathbf{C}_{de} \in \mathbb{R}^{(q+n_d) \times (n+q+n_d)}$ und $\mathbf{R}_{de} \in \mathbb{R}^{(p+n_d) \times (q+n_d)}$.

Das System (4.8) ist regulär, wenn das Ausgangssystem (4.3) regulär ist. Der Beweis läuft über die Blockdiagonalstruktur der Matrizen \mathbf{A}_{de} und \mathbf{E}_{de} [15] (S. 70).

Das System (4.8) mit der statischen Ausgangsrückführung (4.9) entspricht formal dem System (4.1), das für das Verfahren vorausgesetzt wird.

Im Vergleich zum System ohne dynamische Ausgangsrückführung hat (4.8) n_d neue linear unabhängige Eingangsgrößen, sowie n_d neue linear unabhängige Ausgangsgrößen, aber nur n_d zusätzliche Eigenwerte. Mit dieser Beobachtung lässt sich (4.7) erklären. Aus (4.6) für das ursprüngliche System wird nach der Integration der Dynamik des Reglers

$$\begin{aligned}\check{p} + n_d + \check{q} + n_d &\geq n_v + n_d + 1 \\ \check{p} + n_d + \check{q} &\geq n_v + 1.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Ist (4.6) nicht erfüllt, so wird also mittels (4.7) die notwendige dynamische Ordnung des Reglers bestimmt, um alle verschiebbaren Eigenwerte vorgeben zu können. Dann wird die Dynamik der Rückführung, wie in diesem Abschnitt gezeigt, in die Dynamik des Systems integriert. Dadurch kann erneut von einem Deskriptorsystem ohne Durchgriff ausgegangen werden, für das eine statische Ausgangsrückführung entworfen werden soll. Dieses Vorgehen ist immer und ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich.

Die Voraussetzung, dass das System die Form (4.1) haben muss, verhindert also weder die Behandlung von Systemen mit Durchgriff noch den Entwurf dynamischer Rückführungen. Damit kann im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einem System der Form (4.1) ausgegangen werden, für das der Regler (4.2) entworfen werden soll.

4.4 Das Reglerentwurfsverfahren

Der Regler wird über einen kaskadierten Entwurf bestimmt. Zwei Kaskaden reichen für die Vorgabe aller verschiebbaren Eigenwerte aus. Die erste Kaskade wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Sie ermöglicht das Festlegen einer bestimmten Anzahl von Eigenwerten und deckt eine noch frei wählbare Matrix auf. Mithilfe dieser frei wählbaren Matrix werden in einer zweiten Kaskade die restlichen verschiebbaren Eigenwerte festgelegt.

Beim Entwurf muss sichergestellt werden, dass der entstehende geschlossene Regelkreis regulär ist. Auf diese Problematik wird im dritten Abschnitt eingegangen.

4.4.1 Erste Kaskade

Das System gemäß (4.1) wird mit dem Regler gemäß (4.2) geschlossen:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BRC})\mathbf{x} + \mathbf{B}F\mathbf{w}.$$

Daraus folgt das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n_v.\tag{4.11}$$

Mit der Definition der Steuer- und Messvektoren

$$\begin{aligned} \text{Steuervektoren: } \mathbf{p}_i &= \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{v}_i & i &= 1, \dots, s_R \\ \text{Messvektoren: } \mathbf{q}_i &= \mathbf{C}\mathbf{v}_i & i &= 1, \dots, s_R \end{aligned} \quad (4.12)$$

kann das Eigenwertproblem zu

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, s_R \quad (4.13)$$

umformuliert werden. s_R ist zunächst unbekannt. Mit $\mathbf{P}_{s_R} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{s_R}]$ und $\mathbf{Q}_{s_R} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{s_R}]$ folgt aus der Definition der Steuer- und Messmodi außerdem

$$\mathbf{P}_{s_R} = \mathbf{R}\mathbf{Q}_{s_R}. \quad (4.14)$$

Diese Gleichung ist lösbar, wenn $\text{rg}(\mathbf{Q}_{s_R}) = s_R$. Da $\text{rg}(\mathbf{Q}_{s_R}) \leq \check{q}$ folgt $s_R \leq \check{q}$. Also ist die Anzahl der durch (4.13) vorgebbaren Eigenwerte durch die Anzahl unabhängiger Ausgänge beschränkt.

Für $s_R = q$ kann \mathbf{R} direkt aus (4.14) bestimmt werden. Für $s_R < q$ ist (4.14) nicht eindeutig bestimmt, da noch Freiheitsgrade übrig bleiben. Mit der Parametrierung des Linkskerns von \mathbf{Q}_{s_R} mit \mathbf{U}_1 (d. h. : $\mathbf{U}_1 \mathbf{Q}_{s_R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{(q-s_R) \times q}$, $\mathbf{Q}_{s_R} \in \mathbb{R}^{q \times s_R}$) kann die Lösung von (4.14) aus

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{P}_{s_R} \mathbf{Q}_{s_R}^+}_{\mathbf{R}_1^0} + \underbrace{\mathbf{R}_1^1 \mathbf{U}_1}_{\text{Partikuläre Lösung}} = \underbrace{\mathbf{R}_1^0}_{\text{Homogene Lösung}} + \underbrace{\mathbf{R}_1^1 \mathbf{U}_1}_{\text{Partikuläre Lösung}} \quad (4.15)$$

bestimmt werden.

Dabei ist $\mathbf{Q}_{s_R}^+ = (\mathbf{Q}_{s_R}^T \mathbf{Q}_{s_R})^{-1} \mathbf{Q}_{s_R}^T$ die Pseudoinverse von \mathbf{Q}_{s_R} [16]. $\mathbf{R}_1^1 \in \mathbb{R}^{p \times (q-s_R)}$ ist in (4.15) wegen $\mathbf{P}_{s_R} = \mathbf{R}\mathbf{Q}_{s_R} = (\mathbf{P}_{s_R} \mathbf{Q}_{s_R}^+ + \mathbf{R}_1^1 \mathbf{U}_1) \mathbf{Q}_{s_R} = \mathbf{P}_{s_R} \mathbf{Q}_{s_R}^+ \mathbf{Q}_{s_R} = \mathbf{P}_{s_R}$ noch frei wählbar und stellt die übrigen $p \times (q - s_R)$ Freiheitsgrade dar. Wie \mathbf{R}_1^1 gewählt wird, hat keinen Einfluss auf die festgelegten s_R Eigenwerte. Diese sind in \mathbf{y}_1 wegen \mathbf{U}_1 unbeobachtbar und damit nicht verschiebbar. Abbildung 4.1 stellt die erste Kaskade der Ausgangsrückführung dar.

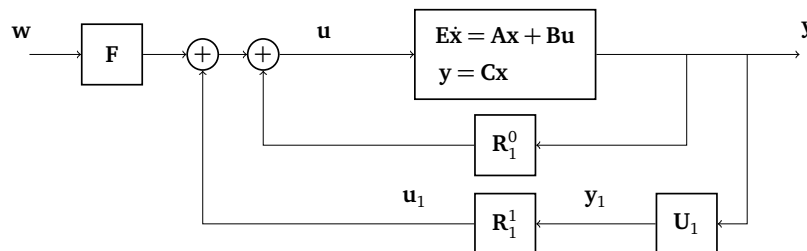


Abbildung 4.1.: Erste Kaskade der Ausgangsrückführung

4.4.2 Zweite Kaskade

Für $s_R < q$ enthält \mathbf{R}_1^1 noch ungenutzte Freiheitsgrade. Um diese auszuschöpfen, werden neue Aus- und Eingangsgrößen (vgl. Abbildung 4.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{y} = \mathbf{U}_1 \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{R}_1^1 \mathbf{y}_1 \end{aligned}$$

definiert. Es folgt das neue Regelungsgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{y} + \mathbf{F} \mathbf{w} = (\mathbf{R}_1^0 + \mathbf{R}_1^1 \mathbf{U}_1) \mathbf{y} + \mathbf{F} \mathbf{w} = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{y} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{F} \mathbf{w}$$

und daraus der geschlossene Regelkreis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{R}_1^0 \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}_1 + \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{w} \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{U}_1 \mathbf{C} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

dessen Regularität beim Entwurf von \mathbf{R}_1^0 sichergestellt werden muss. Das zugehörige verallgemeinerte Linkseigenwertproblem lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j (\lambda_j \mathbf{E} - \underbrace{\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}_1^0 \mathbf{C}}_{-\mathbf{A}^1} - \underbrace{\mathbf{B}}_{\mathbf{B}^1} \underbrace{\mathbf{R}_1^1 \mathbf{U}_1 \mathbf{C}}_{\mathbf{C}^1}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{w}_j \neq \mathbf{0}, j = 1, \dots, n_v \\ \mathbf{w}_j (\lambda_j \mathbf{E} - \mathbf{A}^1 - \mathbf{B}^1 \mathbf{R}_1^1 \mathbf{C}^1) &= \mathbf{0}, & \mathbf{w}_j \neq \mathbf{0}, j = 1, \dots, n_v. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dabei gilt für die Dimensionen der Matrizen: $\mathbf{A}^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{R}_1^1 \in \mathbb{R}^{p \times (q-s_R)}$ und $\mathbf{C}^1 \in \mathbb{R}^{(q-s_R) \times n}$.

Die Linksmess- und Linkssteuervektoren werden definiert

$$\begin{aligned} \text{Linksmessvektoren: } \mathbf{l}_j &= \mathbf{w}_j \mathbf{B}^1 \mathbf{R}_1^1 & j = 1, \dots, s_L \\ \text{Linkssteuervektoren: } \mathbf{s}_j &= \mathbf{w}_j \mathbf{B}^1 & j = 1, \dots, s_L \end{aligned} \quad (4.17)$$

und das verallgemeinerte Eigenwertproblem nach (4.16) zur parametrischen Entwurfsgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_j & \mathbf{l}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_j \mathbf{E} - \mathbf{A}^1 \\ -\mathbf{C}^1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, s_L, \quad s_L \leq \check{p} \quad (4.18)$$

umgestellt.

Mit der Definition von $\mathbf{L}_{s_L} = [\mathbf{l}_1^T, \mathbf{l}_2^T, \dots, \mathbf{l}_{s_L}^T]^T$ und $\mathbf{S}_{s_L} = [\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_2^T, \dots, \mathbf{s}_{s_L}^T]^T$ folgt

$$\mathbf{L}_{s_L} = \mathbf{S}_{s_L} \mathbf{R}_1^1. \quad (4.19)$$

Durch Parametrierung des Rechtskerns von \mathbf{S}_{s_L} mit $\mathbf{S}_{s_L} \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$ und mit der Pseudoinversen $\mathbf{S}_{s_L}^+ = \mathbf{S}_{s_L}^T (\mathbf{S}_{s_L} \mathbf{S}_{s_L}^T)^{-1}$ ergibt sich

$$\mathbf{R}_1^1 = \underbrace{\mathbf{S}_{s_L}^+ \mathbf{L}_{s_L}}_{\mathbf{R}_2^0} + \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_2^0 + \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^1. \quad (4.20)$$

Nach Einsetzen in (4.15) folgt für den Regler

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1^0 + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{U}_1. \quad (4.21)$$

$\mathbf{R}_2^1 \in \mathbb{R}^{(p-s_L) \times (q-s_R)}$ enthält dabei die restlichen Freiheitsgrade. Die s_L festgelegten Eigenwerte sind über \mathbf{R}_2^1 nicht steuerbar. Zwar kann beliebig häufig zwischen dem Entwurf der ersten Kaskade und demjenigen der zweiten Kaskade gewechselt werden, jedoch ergeben sich daraus keine Vorteile bezüglich der bestimmbar Eigenwerte. Die maximale Anzahl Eigenwerte kann z. B. festgelegt werden, indem im ersten Schritt $s_R = \check{q} - 1$ und im zweiten Schritt $s_L = \check{p}$ gewählt wird. Dann können $\check{p} + \check{q} - 1$ Eigenwerte vorgegeben werden.

Abbildung 4.2 zeigt das Blockschaltbild der kaskadierten Rückführung. Werden in den ersten beiden Entwurfsschritten alle verschiebbaren Eigenwerte vorgegeben, so ist $\text{rg}(\mathbf{R}_2^1) = 0$ und die Rückführung über \mathbf{R}_2^1 entfällt.

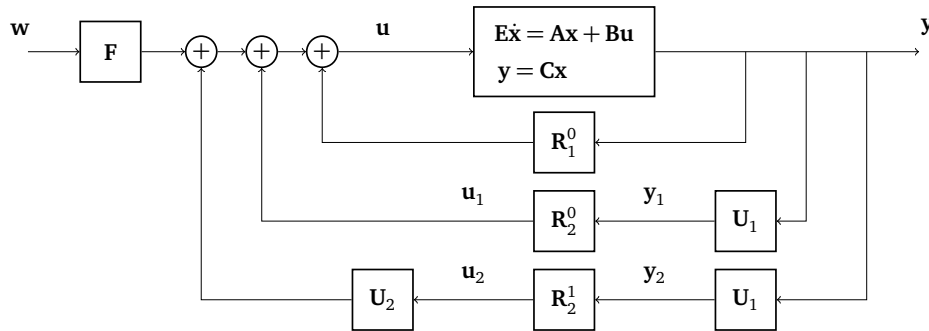


Abbildung 4.2.: Zweite Kaskade der Ausgangsrückführung

4.5 Regularität des geschlossenen Regelkreises

Die Regularität des geschlossenen Regelkreises kann am Ende des Entwurfs überprüft werden. Es kann aber auch während des Entwurfs nach jedem Entwurfsschritt überprüft werden, ob noch ein regulärer geschlossener Regelkreis erreicht werden kann. Mit $\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ als die Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises lautet der dazu notwendige Satz [15] (S. 75, 80):

Satz 4.1

Es gelte $\text{rg}(\mathbf{Q}_{s_R}) = s_R$. Mit der Rückführung, welche die Nebenbedingung $\mathbf{P}_{s_R} = \mathbf{RQ}_{s_R}$ erfüllt, lässt sich genau dann ein regulärer geschlossener Regelkreis entwerfen, wenn

$$\text{rg} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{G}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{s_R} \\ \mathbf{P}_{s_R} \end{bmatrix} \right) = s_R \quad (4.22)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Für die zweite Kaskade ist der dazu duale Ausdruck

$$\text{rg} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{s_L} & \mathbf{I}_{s_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{G}(\lambda) \end{bmatrix} \right) = s_L \quad (4.23)$$

zu prüfen.

Mit Satz 4.1 lässt sich nach jedem festgelegten Steuer- oder Linksmessvektor prüfen, ob im weiteren Entwurf ein regulärer geschlossener Regelkreis erreicht werden kann.

4.6 Vorfilterentwurf

Der Entwurf des Vorfilters kann für Deskriptorsysteme analog erfolgen zum Entwurf für klassische Zustandsraumsysteme. Der Vorfilter soll nach dem Einschwingvorgang zu $\mathbf{w} = \mathbf{y}$ führen. Ein s als Index kennzeichne, dass sich das System im stationären Zustand befindet und also der Einschwingvorgang vorbei ist. Demnach gilt $\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$. Es folgt für den geschlossenen Regelkreis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{M}\mathbf{x}_s + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{w}_s \\ \mathbf{x}_s &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{w}_s \\ \mathbf{y}_s &= -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{w}_s. \end{aligned}$$

Damit muss das Vorfilter schlussendlich zu

$$\mathbf{F} = -\left[\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\right]^{-1} \quad (4.24)$$

gewählt werden. Existiert die Inverse nicht, so kann $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y} = \mathbf{w}$ nicht erreicht werden. Die Anwendung der Pseudoinversen führt lediglich zu einer Annäherung von $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y} = \mathbf{w}$.

5 Verbesserung der Robustheit des geschlossenen Regelkreises

Nun soll die Robustheit des Reglers maximiert werden. Die Entwurfparameter sind bei der ersten Kaskade $(\lambda_i, \mathbf{p}_i)$ mit $i = 1, \dots, s_R$ und bei der zweiten Kaskade $(\lambda_j, \mathbf{l}_j)$ mit $j = 1, \dots, s_L$.

Wie in Abschnitt 4.4.2 diskutiert, kann ohne Nachteil immer $s_R = \tilde{q} - 1$ und $s_L = \tilde{p}$ gewählt werden. Dabei sollte $s_R + s_L = n_v$ gelten. Ist aber $s_R + s_L < n_v$, so wird eine dynamische Rückführung entworfen, dessen Dynamik entsprechend Abschnitt 4.3.2 in das System integriert wird.

Denkbar ist es, einen Bereich für die Eigenwerte vorzugeben, sodass die Wahrscheinlichkeit einen robusten Regler zu erhalten steigt. Da dies den Entwurf aber verkompliziert, wird von n_v fest vorgegebenen Eigenwerten ausgegangen.

In diesem Fall bleiben lediglich die Steuervektoren \mathbf{p}_i und die Linksmessvektoren \mathbf{l}_j als Entwurfparameter übrig. Diese müssen so gewählt werden, dass ein regulärer geschlossener Regelkreis entsteht. Allerdings führt fast jede Reglermatrix \mathbf{R} zu einem regulären geschlossenen Regelkreis [26], sodass die Notwendigkeit der Regularität des geschlossenen Regelkreises keine wirkliche Einschränkung bezüglich der Wahl der Entwurfparameter darstellt.

Im Folgenden werden Algorithmen behandelt, die angewendet werden können, um \mathbf{p}_i und \mathbf{l}_j so zu wählen, dass die aggregierte Kondition minimiert wird, wodurch die Robustheit der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises maximiert wird.

5.1 Gradientenverfahren

Zur Umsetzung des Gradientenverfahrens wird die Matlab-Funktion „fminunc“ benutzt. Wird ihr die Berechnungsvorschrift für den Gradienten übergeben, so wird ein Trust-Region-Verfahren verwendet. Andernfalls wird ein Quasi-Newton-Verfahren angewendet. Genauere Informationen sowie Literaturverweise zu diesen Verfahren finden sich in der Matlab Dokumentation.

In [22] wird ein Gradient zur Optimierung der Kondition der Eigenvektormatrix für klassische Zustandsraumssysteme hergeleitet. Der Regler in [22] ist wie in dieser Arbeit eine Ausgangsrückführung und die Parametrierung der für die Robustheit zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade geschieht ebenfalls wie in dieser Arbeit, sodass viele Zwischenergebnisse übernommen werden können.

Bevor mit der Berechnung des Gradienten begonnen wird, werden die beiden verallgemeinerten Eigenwertprobleme (4.13) und (4.18) umformuliert. Es sei

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \mathbf{p}_i \quad i = 1, \dots, s_R \quad (5.1)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{1^T} - \lambda_i \mathbf{E}^T & \mathbf{C}^{1^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i^T \\ \mathbf{l}_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{1^T} - \lambda_i \mathbf{E}^T & \mathbf{C}^{1^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \mathbf{l}_i \quad i = 1 + s_R, \dots, s_R + s_L. \quad (5.2)$$

Dann ergibt sich der Regler zu (vgl. (4.15), (4.20), (4.21))

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}'_{s_R} \mathbf{Q}_{s_R}^+ + \mathbf{S}_{s_L}^+ \mathbf{L}'_{s_L} \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{U}_1.$$

Es wird davon ausgegangen, dass in den ersten beiden Entwurfsschritten alle Eigenwerte vorgegeben wurden. Eventuelle weitere Freiheitsgrade, die \mathbf{R}_2^1 für den Fall $\check{p} + \check{q} > n_v + 1$ zur Verfügung stellen würde, bleiben zur Vereinfachung der Berechnung des Gradienten unberücksichtigt. Daher gilt

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}'_{s_R} (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ + (\mathbf{W}_{s_L} \mathbf{B}^1)^+ \mathbf{L}'_{s_L} \mathbf{U}_1 = \mathbf{P}'_{s_R} (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ + \underbrace{(\mathbf{W}_{s_L} \mathbf{B})^+ \mathbf{L}'_{s_L}}_{\mathbf{R}_1} \mathbf{U}. \quad (5.3)$$

J_x sei die Funktion, anhand der die aggregierte Kondition der Eigenwerte gemäß (3.2) berechnet wird:

$$J_x = J_x \left(\mathbf{R} \left(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{s_R}, \mathbf{l}_{1+s_R}, \dots, \mathbf{l}_{s_R+s_L} \right) \right) = J_x \left(r_{\mu\nu} \left(p_{ij}, l_{i'j'} \right) \right). \quad (5.4)$$

Mit: $\mu = 1, \dots, p \quad \nu = 1, \dots, q$
 $i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, s_R$
 $i' = 1, \dots, q - s_R \quad j' = 1 + s_R, \dots, s_R + s_L$

Im Folgenden wird

$$\frac{\partial J_x}{\partial p_{ij}} = \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q \mathbf{e}_\mu^T \frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{ij}} \mathbf{e}_\nu \quad (5.5)$$

berechnet. Dafür wird die Ableitung des Reglers nach den Rechtsparametern $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{ij}}$ und die Ableitung der Konditionszahlen nach dem Regler $\frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}}$ benötigt. Für $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{ij}}$ wird auf [22] zurückgegriffen.

5.1.1 Ableitung des Reglers nach den Parametern

Die Ergebnisse aus [22] können mit geringer Anpassung übernommen werden, da die Rechnung auf gleiche Weise auch für Deskriptorsysteme durchführbar ist. Unter der Voraussetzung $s_R = q - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_x}{\partial p_{ij}} = & \mathbf{e}_i^T \mathbf{M}_j^T \frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^{+T} \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i^T (\mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{N}_j)^T \frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^{+T} \mathbf{e}_j \\ & + \mathbf{e}_i^T (\mathbf{C} \mathbf{N}_j)^T \left((\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R}) (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ - \mathbf{I} \right) \left(\frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} \right)^T (\mathbf{R}_1 \mathbf{U} - \mathbf{R}) (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^{+T} \mathbf{e}_j \\ & - \mathbf{U} \left(\frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} \right)^T (\mathbf{W}_{s_L} \mathbf{B})^+ \frac{\partial \mathbf{W}_{s_L}}{\partial p_{ij}} \mathbf{B} \mathbf{R}_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Und außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_{j'}}{\partial p_{ij}} = & \mathbf{w}_{j'} \mathbf{B} \left((\mathbf{M}_j - \mathbf{R}_1 \mathbf{C}^1 \mathbf{N}_j) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ + \mathbf{P}'_{s_R} (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ \mathbf{R}_{ij} \right) \mathbf{C} (\lambda_{j'} \mathbf{E} - \mathbf{A}^1)^{-1}, \\ \mathbf{R}_{ij} = & (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^{+T} \left(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{N}_j^T \mathbf{C}^T \right) \left(\mathbf{I} - (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R}) (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+ \right) - (\mathbf{C} \mathbf{N}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) (\mathbf{C} \mathbf{V}_{s_R})^+. \end{aligned}$$

Gilt $s_R = q - 1$, so sind die linksseitigen Parametervektoren Skalare, die die Richtung der Eigenvektoren nicht beeinflussen können. Somit haben die linksseitigen Parametervektoren keinen Einfluss auf die Vektoren der WKF und somit auch nicht auf die Kondition der Eigenwerte. Dass ein Skalar l_i keine Bedeutung hat, lässt sich z. B. auch an der Entwurfsgleichung (5.2) erkennen, wo er sich kürzen lässt.

Für den Fall $\check{q} < q$ ist $s_R = q - 1$ nicht erfüllbar. Dann kann der Gradient so nicht dargestellt werden. In einem solchen Fall werden die abhängigen Ausgänge weggelassen, sodass wieder $\check{q} = q$ gilt. $\check{q} = q$ wird im Folgenden für die Berechnung des Gradienten vorausgesetzt. Welche Ausgänge linear abhängig sind, wird am einfachsten durch Weglassen eines Ausgangs und erneuter Berechnung von \check{q} bestimmt. Bleibt \check{q} konstant, wurde ein abhängiger Ausgang gefunden.

Der Fall $n_v < \check{q} - 1$ kann bei Berechnung von \check{q} gemäß (4.5) nicht vorkommen, da immer $\check{q} \leq n_v$ gilt. Es können also immer $s_R = q - 1$ Eigenwerte rechtsseitig vorgegeben werden, wodurch die Linksparemetervektoren Skalare werden und keine weiteren Freiheitsgrade für die Verbesserung der Robustheit bereitstellen. Daher kann auf eine Berechnung von $\frac{\partial J_x}{\partial l_{i'j'}}$ verzichtet werden.

5.1.2 Ableitung der Konditionszahl nach dem Regler

Die hier verwendete Konditionszahl unterscheidet sich von der in [22].

Weil die Maximierung, wie sie in (3.2) vorkommt, bei der Berechnung einer Ableitung hinderlich ist, wird davon ausgegangen, dass nur einfache endliche Eigenwerte vorkommen. Lediglich

der mehrfache unendliche Eigenwert könnte also die Maximierung notwendig machen. Unter der weiteren Voraussetzung, dass dieser mehrfache unendliche Eigenwert nicht steuerbar ist, wäre seine Kondition nicht relevant, da eine strukturerhaltende Störung ihn nicht verändern würde. Unter einer strukturerhaltenden Störung wird eine Störung verstanden, die die Struktur des Systems nicht verändert, sondern lediglich Änderungen von Systemparametern widerspiegelt. Bei Systemen mit steuerbaren unendlichen Eigenwerten könnte hingegen eine strukturerhaltende Störung der Systemmatrizen dazu führen, dass die steuerbaren unendlichen Eigenwerte endlich werden. Dies hätte zur Folge, dass die Kondition dieser Eigenwerte sich abrupt verändern würde, da sich in der Berechnungsvorschrift sowohl α und β als auch die Vektoren \mathbf{h} und \mathbf{j} schlagartig verändern würden. Je nach Störung ergäben sich somit unterschiedliche endliche Eigenwerte und unterschiedliche Konditionszahlen. Insgesamt ist die Kondition der unendlichen Eigenwerte also nicht sehr aussagekräftig, sodass sie in der aggregierten Konditionszahl auch mit null gewichtet werden kann. Dann würde die Maximierung komplett wegfallen. Davon wird im Folgenden ausgegangen. Sollte in der Praxis ein solches nicht properes System vorliegen, so sollte versucht werden, die steuerbaren unendlichen Eigenwerte durch weitere Sensoren verschiebbar zu machen, um ein properes System zu erhalten.

Gesucht wird also

$$\frac{\partial J_x}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n_e} g_i \frac{\|\mathbf{h}_i\|_2 \|\mathbf{j}_i\|_2}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}}{\partial \mathbf{R}}.$$

Mit der Ableitung der 2-Norm $\frac{\partial \|\mathbf{x}\|_2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$ (vgl. [17] (S. 14)) folgt durch Anwendung von Produkt-, Ketten- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_x}{\partial r_{ij}} &= \sum_{k=1}^{n_e} g_k \frac{(\|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2)' \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} - \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2 (\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2})'}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n_e} g_k \left(\frac{\left(\frac{\mathbf{h}_k}{\|\mathbf{h}_k\|_2} \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial r_{ij}} \|\mathbf{j}_k\|_2 + \|\mathbf{h}_k\|_2 \frac{\mathbf{j}_k}{\|\mathbf{j}_k\|_2} \frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial r_{ij}} \right) \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{\|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2 \alpha_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{-0.5} \frac{\partial \alpha_k}{\partial r_{ij}}}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Da die unendlichen Eigenwerte allesamt mit null gewichtet werden, ist $\beta_k = 1$ und $\frac{\partial \alpha_k}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}}$. Da außerdem von einfachen endlichen Eigenwerten ausgegangen wird, kann so vorgegangen werden wie in [4] (S. 570-571). Wird die dort gezeigte Rechnung für ein Deskriptorsystem durchgeführt folgt

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} = - \frac{\mathbf{w}_k \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{w}_k \mathbf{E} \mathbf{v}_k}. \quad (5.8)$$

Es werden noch $\frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial r_{ij}}$ sowie $\frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial r_{ij}}$ benötigt. Die Vektoren \mathbf{h} und \mathbf{j} ergeben sich wegen (2.2)

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \mid \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} \right]^{-1} \quad \mathbf{J} = \left[\mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \mid \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} \right]$$

aus den Hauptvektorketten. Dabei ist wie gehabt \mathbf{h} eine Zeile von \mathbf{H} . Selbstverständlich wird der geschlossene Regelkreis untersucht, sodass hier \mathbf{A} die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises darstellt. Für die Bestimmung von $\frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial r_{ij}}$ reicht es offensichtlich, die Hauptvektorketten abzuleiten. Für die Ableitung von \mathbf{h} wird die Ableitung der inversen Matrix (vgl. z. B. [23] (S. 55))

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r_{ij}} = - \left[\mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \mid \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} \right]^{-1} \frac{\partial \left[\mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \mid \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} \right]}{\partial r_{ij}} \left[\mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \mid \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} \right]^{-1}.$$

benötigt. Für die mittleren Terme gilt

$$\frac{\partial \mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} \quad \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} = \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}}.$$

Also ist auch für die Bestimmung von $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial r_{ij}}$ die Ableitung der Hauptvektoren notwendig.

Die Hauptvektoren berechnen sich für endliche Eigenwerte aus

$$(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} = -\mathbf{E} \mathbf{v}_{k,j'}^{k'-1} \quad \mathbf{v}_{k,j'}^0 = 0, \quad \mathbf{v}_{k,j'}^1 \neq 0.$$

Für unendliche Eigenwerte folgen sie aus

$$\mathbf{E} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'} = \mathbf{A} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'-1} \quad \mathbf{v}_{\infty,j'}^0 = 0, \quad \mathbf{v}_{\infty,j'}^1 \neq 0.$$

Für die Ableitungen ergibt sich für endliche Eigenwerte

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{k,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} &= -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'-1}}{\partial r_{ij}} \\ (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} &= -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'-1}}{\partial r_{ij}} - \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} \mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \right) \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \end{aligned}$$

und unendliche Eigenwerte

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} = \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'-1} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{v}_{\infty,j'}^{k'-1}}{\partial r_{ij}}.$$

\mathbf{E} und $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A})$ sind singular, weshalb statt der Inversen die Pseudoinverse verwendet wird. Damit folgt für endliche Eigenwerte

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} = (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A})^+ \left[-\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{v}_{k,j'}^{k'-1}}{\partial r_{ij}} - \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} \mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \right) \mathbf{v}_{k,j'}^{k'} \right] \quad (5.9)$$

und für unendliche Eigenwerte

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\infty, j'}^{k'}}{\partial r_{ij}} = \mathbf{E}^+ \left[\mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_{\infty, j}^{k'-1} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{v}_{\infty, j'}^{k'-1}}{\partial r_{ij}} \right]. \quad (5.10)$$

Für $k' = 1$ wird $\mathbf{v}_{k, j'}^{k'-1} = 0$, sodass sich Anfangswerte für die Iteration ergeben. $\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}}$ wird aus (5.8) berechnet. Die Singularität von $(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A})$ bedeutet, dass die Ableitung nicht eindeutig bestimmt ist. Die Verwendung der Pseudoinversen zur Lösung der Gleichung führt dazu, dass eine Ableitung aus der Menge der möglichen Ableitungen ausgewählt wird. Da die Matrizen nicht vollen Rang haben, muss die Pseudoinverse hier mithilfe der Singulärwertzerlegung berechnet werden (vgl. zB. [23] (S. 29)).

5.2 Gütevektroptimierung

Das Verfahren der Gütevektroptimierung nach Kreisselmeier und Steinhauser [10] ist ein Verfahren zur gleichzeitigen Verkleinerung mehrerer Gütemaße. Im vorliegenden Fall handelt es sich um v_i in Abhängigkeit der Parametervektoren $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{s_R}$. Ausgehend von einem Startwert \mathbf{P}_0 werden sogenannte Vorgabewerte c_i gewählt. Für diese muss $c_i > v_i(\mathbf{P}_0)$ gelten. Nun werden die Funktionen $\frac{v_i(\mathbf{P}_0)}{c_i}$ für $i = 1, \dots, n_e$ gebildet. Diese sind in einem Bereich \mathbf{P}_B um den Startwert kleiner eins. Es wird die Funktion

$$\alpha(\mathbf{P}) = \max \left[\frac{v_1(\mathbf{P})}{c_1}, \dots, \frac{v_{n_e}(\mathbf{P})}{c_{n_e}} \right] \quad (5.11)$$

definiert.

Das Berechnen von $\alpha(\mathbf{P})$ ist für das Verfahren entscheidend. $\alpha(\mathbf{P})$ könnte durch Gitterpunkte angenähert werden. Dies wäre allerdings mit entsprechendem Rechenaufwand verbunden. Stattdessen lässt sich $\alpha(\mathbf{P})$ auch analytisch durch

$$\hat{\alpha}(\mathbf{P}) = \frac{1}{20} \ln \left[e^{20 \frac{v_1(\mathbf{P})}{c_1}} + \dots + e^{20 \frac{v_{n_e}(\mathbf{P})}{c_{n_e}}} \right] \quad (5.12)$$

annähern. Für die Herleitung siehe [4] (S. 622-623).

Nun wird das Minimum von $\alpha(\mathbf{P})$ gesucht. Dies ist in der Umsetzung des Verfahrens mit der Matlab-Funktion „fminunc“ geschehen. Hierbei lässt sich der Gradient selber berechnen und der Funktion übergeben, oder er lässt sich automatisch durch finite Differenzen annähern. Daher soll die Berechnung des Gradienten für dieses Problem diskutiert werden.

Aus (5.5) folgt mit $J_x = \hat{\alpha}$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial p_{ij}} = \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^q \mathbf{e}_{\mu}^T \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{e}_{\nu} \mathbf{e}_{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{ij}} \mathbf{e}_{\nu}. \quad (5.13)$$

Dabei hat sich $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{ij}}$ im Vergleich zum vorigen Kapitel nicht geändert, sodass (5.6) weiterhin gültig ist. Es bleibt die Bestimmung von $\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{R}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial r_{ij}} &= \frac{1}{20} \frac{\partial \ln \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} e^{\frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}} \right\}}{\partial r_{ij}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n_e} e^{\frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}} \frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k} \frac{\partial \frac{\|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}}{\partial r_{ij}}}{20 \sum_{k=1}^{n_e} e^{\frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_e} c_k^{-1} e^{\frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}} \frac{\partial \frac{\|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}}{\partial r_{ij}}}{\sum_{k=1}^{n_e} e^{\frac{20 \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{c_k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}}}. \end{aligned}$$

An (5.7) lässt sich erkennen, dass für $k = 1, \dots, n_e$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}}{\partial r_{ij}} &= \\ &= \frac{\left(\frac{\mathbf{h}_k}{\|\mathbf{h}_k\|_2} \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial r_{ij}} \|\mathbf{j}_k\|_2 + \|\mathbf{h}_k\|_2 \frac{\mathbf{j}_k}{\|\mathbf{j}_k\|_2} \frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial r_{ij}} \right) \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} - \|\mathbf{h}_k\|_2 \|\mathbf{j}_k\|_2 \alpha_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{-0.5} \frac{\partial \alpha_k}{\partial r_{ij}}}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

gelten muss.

Die Berechnung von $\frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial r_{ij}}$, $\frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial r_{ij}}$ und $\frac{\partial \alpha_k}{\partial r_{ij}}$ erfolgt wie in Abschnitt 5.1.2.

Das Minimum von $\hat{\alpha}$ sei mithilfe des Gradientenverfahrens bei \mathbf{p}_1 identifiziert worden. Im Minimum gilt (bei guter Näherung von α durch $\hat{\alpha}$) $\hat{\alpha}(\mathbf{p}_1) \leq \hat{\alpha}(\mathbf{p}_0) < 1$. Außerdem ist $\frac{v_i(\mathbf{p}_1)}{c_i} \leq \hat{\alpha}(\mathbf{p}_1)$ und somit auch $v_i(\mathbf{p}_1) \leq c_i \hat{\alpha}(\mathbf{p}_1)$. Da $v_i(\mathbf{p}_0) < c_i$ und $\hat{\alpha}(\mathbf{p}_1) < 1$, ist damit gezeigt, dass im Punkt \mathbf{p}_1 sämtliche v_i von einer kleineren Schranke eingegrenzt werden als im Punkt \mathbf{p}_0 . Durch Iteration des Verfahrens werden alle v_i gleichzeitig minimiert.

Dieses Verfahren umgeht zwei Schwächen der gewichteten Summe als Gütemaß. Zum einen kann kein Gütemaß während der Optimierung größer werden, wodurch es einfacher wird, vorgegebene Schranken einzuhalten. Zum anderen lässt sich bei Abbruch des Verfahrens erkennen, welcher Vorgabewert zum Abbruch geführt hat. Bei der gewichteten Summe ist dies ohne weiteren Aufwand nicht möglich.

5.3 Weitere Algorithmen

Zur Minimierung der Kondition wurden insgesamt folgende Algorithmen implementiert:

1. Matlab's „fminsearch“ - Simplex Algorithmus nach Nelder und Mead

-
2. Verfahren von Hooke und Jeeves (1961)
 3. Evolutionärer Algorithmus
 4. Gradientenverfahren
 5. Gütevektroptimierung

Matlab's „fminsearch“ benutzt den Simplex-Algorithmus nach Nelder und Mead aus [13]. Dabei handelt es sich um einen Hill-Climbing-Algorithmus, der ohne Ableitungen der zu optimieren- den Funktion auskommt. Es werden im n -dimensionalen Raum $n + 1$ Punkte um den Startwert herum ausgewählt. Diese Punkte stellen einen Simplex dar. Für alle Punkte wird der Funktionswert berechnet. Der Punkt mit dem schlechtesten Funktionswert wird mit einem neuen Punkt ersetzt, der hoffentlich einen besseren Funktionswert hat. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn der Durchmesser des Simplex eine gegebene Toleranz unterschreitet. Der Simplex-Algorithmus nach Nelder und Mead ist ein einfacher und relativ stabiler Algorithmus. Er kann in lokalen Extrema hängen bleiben.

Das Verfahren von Hooke und Jeeves ist ebenfalls ein Hill-Climbing-Algorithmus. Es basiert darauf, dass von einem Startpunkt aus Tastschritte, Extrapolationsschritte und Rücksetzschritte kombiniert werden. Auf diese Art wird ein Minimum durch „Trial and Error“ gefunden. Auch hier muss das Ergebnis kein globales Minimum sein. Das Verfahren wird z. B. in [1] (S. 281-284) ausführlicher beschrieben.

Beim implementierten evolutionären Algorithmus handelt es sich um eine Evolutionsstrategie und nicht um einen genetischen Algorithmus. Bei der Reproduktion wird nur Mutation und keine Rekombination verwendet. Die Eltern mit den besten Funktionswerten überleben. Genaueres zu evolutionären Algorithmen lässt sich z. B. in [1] (S. 301 ff.) finden. Der evolutionäre Algorithmus wurde mithilfe der „Parallel Computing Toolbox“ für die Berechnung auf mehreren Kernen ausgelegt. Die anderen Algorithmen sind nicht (ohne weiteres) parallelisierbar.

5.4 Simulationsergebnisse

Im Folgenden soll das Verhalten unterschiedlich robuster Regelkreise bei Auftreten einer Störung verglichen werden. Dabei werden gegenübergestellt:

1. Die Eigenwerte
2. Die Systemantworten
3. Die Regler

Die untersuchten Systeme sind proper und haben also keine unendlichen steuerbaren Eigenwerte. Daher wurden die Gewichte g_i in der Konditionszahl immer so gewählt, dass nur die endlichen Eigenwerte gleichgewichtet berücksichtigt wurden. In Tabelle 5.1 sind charakteristische Werte der Systeme aufgeführt. Die Systeme werden „System A“ und „System B“ genannt. Die Regler haben zur Unterscheidung zwei Indizes. Der erste Index ordnet den Regler einem

System zu und der zweite nummeriert die Regler eines Systems nach absteigender aggregierter Kondition. Somit ist also der Regler, dessen zweiter Index am kleinsten ist, am wenigsten robust und der, dessen zweiter Index am größten ist, am robustesten.

Die Optimierung der Kondition ist mit einer Kombination der im Vorkapitel genannten Algorithmen erfolgt und soll hier nur kurz diskutiert werden, da kein systematischer Vergleich der Algorithmen mittels Benchmarks durchgeführt wurde. Es wäre auch zu hinterfragen, ob die Ergebnisse eines solchen Vergleiches verallgemeinerbar wären. Eine Vorstellung der Stärken und Schwächen der Algorithmen lässt sich aus ihrer Funktionsweise ableiten. So hat es sich als effizient erwiesen, die Optimierung mit dem Verfahren von Hooke und Jeeves und einer großen Schrittweite zu beginnen. Alternativ ist zu Beginn der Optimierung auch der evolutionäre Algorithmus mit sehr wenigen Iterationen, vielen Individuen und einer weiten Streuung der Anfangsindividuen eine gute Wahl. Dieser erste Schritt dient dazu, durch cleveres Probieren (Hooke und Jeeves) oder durch eine Zufallsverteilung (Evolutionärer Algorithmus) mit wenig Rechenaufwand eine gute Startposition zu finden und dabei zu vermeiden, dass das Verfahren in lokale Minima läuft. Dann hat es sich bewährt, den Simplex Algorithmus nach Nelder und Mead anzuwenden. Die auf Gradienten basierenden Verfahren hatten subjektiv längere Laufzeiten. Außerdem blieben sie eher in lokalen Minima hängen. Dafür konnten sie immer wieder mit nur sehr wenigen Iterationen die Kondition stark verringern.

In Tabelle 5.1 sind unter den Reglern die Konditionszahlen der geschlossenen Regelkreise abgetragen und darunter die Störmatrizen. Die Störmatrix mit zweitem Index **E** wird auf die Systemmatrix **E** und die mit zweitem Index **M** auf die Systemmatrix **M** addiert. Die Stör- und Reglermatrizen sind im Anhang aufgeführt. Um die Systemstruktur nicht zu verändern, wurden die Störmatrizen so erstellt, dass sie bei Addition zur Systemmatrix nur die Werte beeinflussen, die ungleich null sind. In den letzten Zeilen der Tabelle sind die Eigenwerte der gestörten Systeme abgetragen. Ein Vergleich dieser Werte mit den Eigenwerten des geschlossenen Regelkreises in den Zeilen drei und vier der Tabelle zeigt, dass die Minimierung der Konditionszahl die Eigenwerte tatsächlich robuster gemacht hat.

Tabelle 5.1.: Vergleich der Eigenwerte bei Störung

	System A			System B		
Eigenwerte des GRK	-4, -5 ∞, ∞, ∞			-20, -21, -22, -23, -24 ∞		
Regler	$R_{A,1}$	$R_{A,2}$	$R_{A,3}$	$R_{B,1}$	$R_{B,2}$	$R_{B,3}$
Aggregierte Kondition	2015,7	964,9	192,5	$0,8 \times 10^9$	$1,1 \times 10^7$	$2,0 \times 10^6$
Störmatrizen	$S_{A,E}$ und $S_{A,M}$			$S_{B,E}$ und $S_{B,M}$		
	-2	-2,6	-3,7	$-5,16 \pm 9,2i$	$-13,9 \pm 5i$	$-17,4 \pm 4,5i$
Endliche Eigenwerte	18,8	-27,2	-8	-7,8	-22,9	-20
nach Störung	-	-	-	-22	$-32,5 \pm 8,8i$	-22
	-	-	-	26,4	-	-40,1

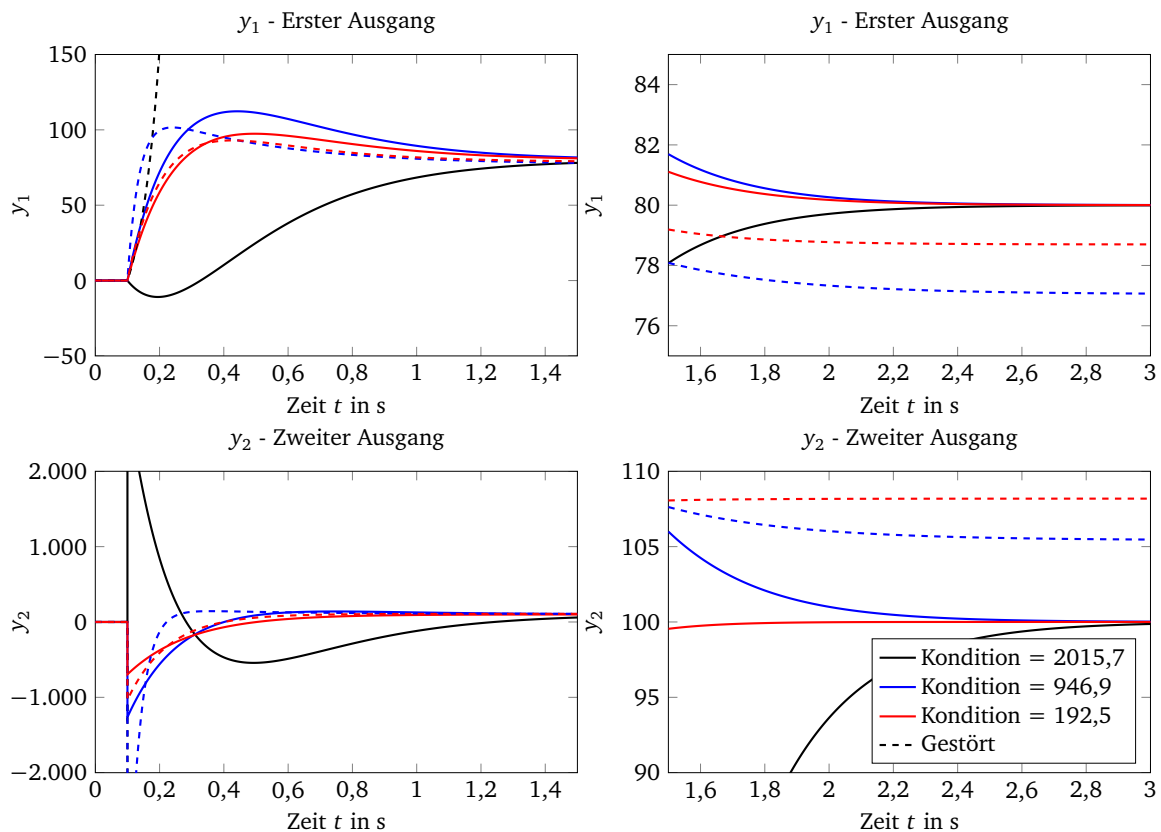


Abbildung 5.1.: Systemantwort von System A auf einen Sprung bei $t = 0,1 \text{ s}$ mit $\mathbf{w}^T = [80, 100]$

System A wurde mit den in Tabelle 5.1 stehenden Reglern geschlossen und zum Zeitpunkt $t = 0,1 \text{ s}$ mit einer Sprungfunktion $\mathbf{u}^T = [80, 100]$ angeregt. Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Das System hat zwei Ausgänge. Die oberen beiden Plots stellen die Reaktion des ersten Ausgangs dar. Die beiden unteren Plots bilden die Reaktion des zweiten Ausgangs ab. Die schwarze Linie kennzeichnet den Regelkreis mit der höchsten Kondition. Die blaue Linie kennzeichnet den Regelkreis mit der mittleren und die rote Linie den mit der niedrigsten Kondition. Ist eine Linie gestrichelt, so entspricht sie der Reaktion des gestörten Systems. Die schwarze gestrichelte Linie ist in den Abbildungen selten zu sehen, da das System instabil ist und die Linie sofort den abgebildeten Bereich verlässt.

Zu erkennen ist zum einen, dass die Antworten der robusten Regelkreise nach Störung näher bei ihren Antworten ohne Störung liegen, als dies für weniger robuste Systeme der Fall ist. Weiterhin ist zu sehen, dass die robusten Regelkreise weniger stark überschwingen. Auch der Sprung des zweiten Ausgangs, der von den nichtdynamischen Modi verursacht wird, fällt bei robusteren Regelkreisen weit weniger hoch aus. Ein Vergleich des zweiten Ausgangs der nicht gestörten Systeme für $t \geq 1,5 \text{ s}$ zeigt daher, dass die robusteren Regelkreise kürzere Ausregelzeiten aufweisen als die weniger robusten. Wegen der hohen Sprünge zu Beginn der Simulation müssen die weniger robusten Systeme sozusagen andere Anfangswerte ausregeln. Somit hat dies nicht direkt was mit der Robustheit der Eigenwerte zu tun. Dass die gestörten Regelkreise unterschiedliche Ausregelzeiten aufweisen, liegt außerdem an den unterschiedlichen Eigenwerten.

Für keines der gestörten Regelkreise gilt $\mathbf{w}_s = \mathbf{y}_s$. Dies ist nicht verwunderlich, da die Vorfilter nur für die ungestörten Regelkreise ausgelegt wurden. Dort wiederum wird diese Bedingung erfüllt.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Minimierung der Kondition der Eigenwerte in den vorliegenden Simulationsergebnissen einen überaus positiven Einfluss auf die Systemdynamik hat. Dies gilt für die gestörten wie für die ungestörten Systeme. Einerseits ist ein Beispiel nicht ausreichend, um sichere Schlussfolgerungen zu ziehen. Andererseits steht das Beobachtete in Einklang mit [9], wo die Erhöhung der Robustheit der Pole bei singulären Systemen mit einer Reduktion oberer Grenzen für das Einschwingverhalten in Verbindung gebracht wird.

Im Anhang befinden sich Simulationsergebnisse für System B. An diesen lassen sich ähnliche Beobachtungen machen, sodass nicht weiter auf sie eingegangen wird.

Ein Vergleich der im Anhang aufgeführten Regler erweckt den Eindruck, als würde eine erhöhte Robustheit mit höheren Einträgen in der Reglermatrix einhergehen. Diese Vermutung wird durch [9] (S. 28) bestätigt, demzufolge ein Trade-Off zwischen möglicher Reduktion der Kondition der Eigenwerte und Höhe der Einträge der Reglermatrix besteht. Erhöhte Einträge in der Reglermatrix führen tendenziell zu erhöhten Stellgrößen, sodass in der Praxis in Form der jederzeit vorhandenen Stellgrößenbeschränkungen eine Nebenbedingung für die Minimierung der Kondition existiert.

Nach [9] (S. 30) ist es durch Minimierung anderer Gleichungen möglich, die Kondition und gleichzeitig obere Grenzen für das Einschwingverhalten und für die Höhe der Einträge der Reglermatrix zu reduzieren. Eine derartige Vorgehensweise könnte sich in der Praxis bei Existenz entsprechender Nebenbedingungen als besser erweisen, als die direkte Minimierung der Konditionszahl.



6 Implementierung in Matlab

6.1 Grafische Benutzeroberfläche

Um die Anwendung der implementierten Algorithmen zu vereinfachen, wurde eine GUI programmiert. Diese teilt sich in drei über Panels getrennte Bereiche auf, die nacheinander zur Verfügung stehen. Abbildung 6.1 zeigt die grafische Benutzeroberfläche. In der Abbildung sind die drei Bereiche rot markiert. Die Minimierung der aggregierten Kondition wird gerade mittels eines evolutionären Algorithmus durchgeführt. Der Wartebalken zeigt den Fortschritt der Optimierung an und ermöglicht ihren Abbruch.

Im Folgenden wird auf jeden Bereich einzeln eingegangen und so die Funktionalitäten der GUI erläutert.

Im ersten Bereich wird das Deskriptorsystem geladen. Es können Deskriptorsysteme aus einer in einer m-File abgelegten Sammlung von Systemen geladen werden. Es ist aber auch möglich Deskriptorsysteme einzugeben, oder zufällige Systeme erstellen zu lassen. Per Knopfdruck wird das geladene System analysiert. Wichtige Informationen zum System werden in einem Textfeld ausgegeben. Die in Abschnitt 4.1 und 4.3.2 behandelten Transformationen werden bei Bedarf automatisch durchgeführt.

Nun steht der zweite Bereich zur Verfügung. In diesem werden die verschiebbaren Eigenwerte für die Polplatzierung vorgegeben und ein entsprechender Regler entworfen. Die Parametervektoren werden dabei zufällig gewählt. Die Konditionszahlen werden neben den Eigenwerten des geschlossenen Regelkreises angezeigt. Eine aggregierte Konditionszahl wird mit gleicher Gewichtung der einzelnen Konditionszahlen berechnet.

Der dritte Bereich ermöglicht die Auswahl eines Optimierungsalgorithmus. Die Anzahl der maximalen Iterationen wird eingestellt und die Gewichte für die aggregierte Konditionszahl können variiert werden. Durch Aktivieren des Radiobuttons „Optimierung Fortsetzen“ wird bei Beginn der Optimierung das Ergebnis der letzten Optimierung verwendet. Gab es noch keine erste Optimierung, oder ist „Optimierung Fortsetzen“ nicht aktiviert, wird das Ergebnis aus dem zweiten Bereich als Ausgangspunkt genommen. So können auf ein Problem verschiedene Algorithmen in beliebiger Reihenfolge angewendet werden, wodurch die Schwächen einzelner Algorithmen zum Teil ausgeglichen werden können.

Es besteht zu jeder Zeit die Möglichkeit, sich den aktuellen Regelkreis anzeigen zu lassen. Im ersten Bereich können der offene Regelkreis und der erweiterte offene Regelkreis ausgegeben werden. Im zweiten und dritten Bereich besteht jeweils die Möglichkeit, sich den Regelkreis

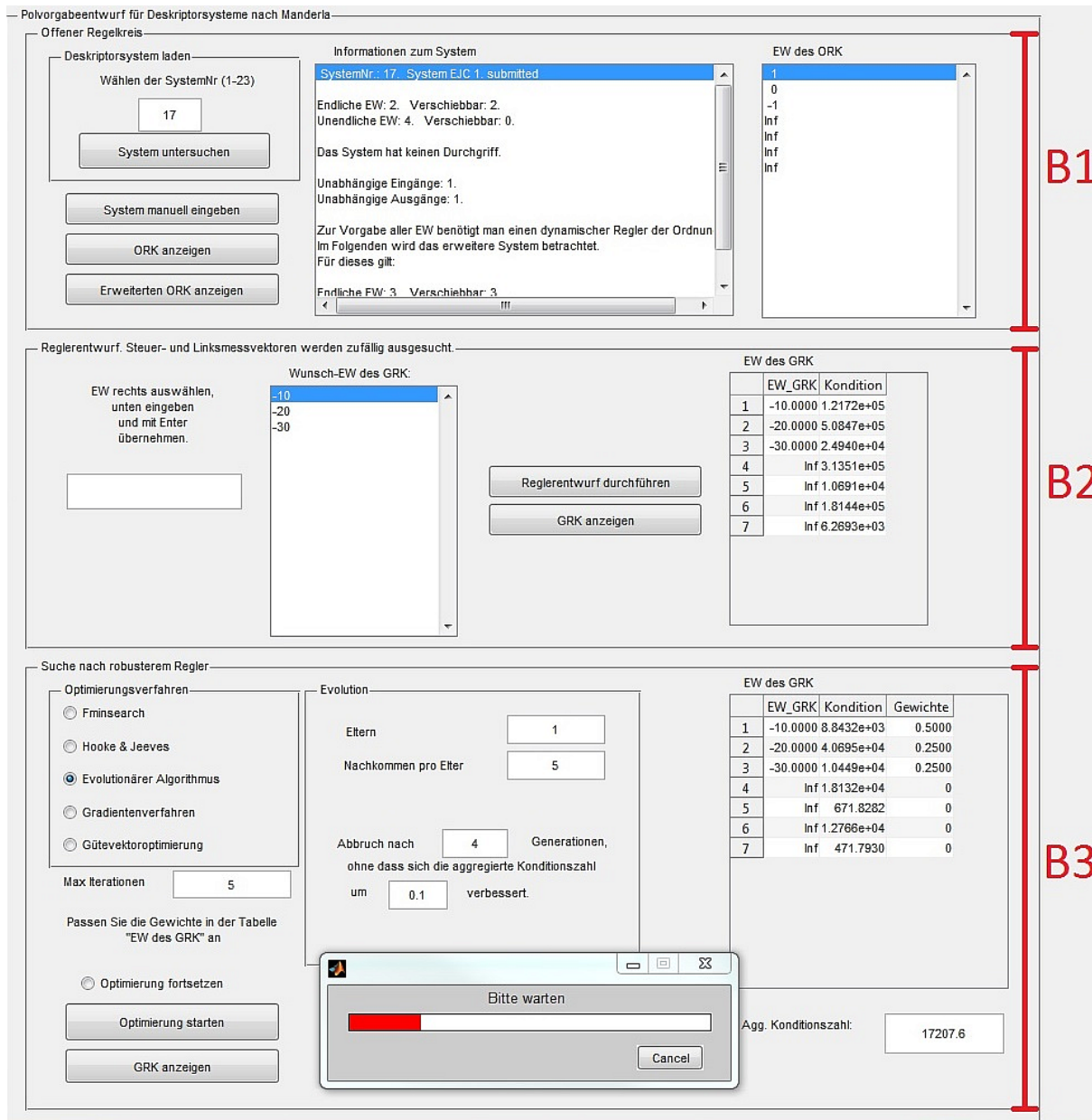


Abbildung 6.1.: Grafische Benutzeroberfläche

anzeigen zu lassen, der mit dem im entsprechenden Bereich entworfenen Regler geschlossen ist. So lassen sich die Reglermatrizen vor und nach Optimierung miteinander verglichen.

6.2 Matlab-Toolbox

Zusätzlich zur GUI wurde das Verfahren zum Entwurf einer robusten Ausgangsrückführung für lineare Deskriptorsysteme in Form der Funktion „OFBDp_Robust“ auch in die Matlab-Toolbox integriert, die im Rahmen der Masterarbeit [18] an der TU-Darmstadt entstanden ist. Die Matlab-Toolbox stellt eine Reihe von Funktionen zur Verfügung, die auch für die Umsetzung von „OFBDp_Robust“ hätten verwendet werden können. Da die Toolbox allerdings erst wäh-

Tabelle 6.1.: Argumente der Funktion „OFBDp_Robust“

Rückgabeargumente		Übergabeargumente	
sysDAE_de	<DAE>	Verfahren	<integer>
K_ges	<double>	inOptionen	<struct>
P_sR	<double>	P_sR	<double>
L_sL	<double>	L_sL	<double>
n_System	<struct>		
aggKondition	<double>		

rend der Bearbeitungszeit dieser Arbeit fertiggestellt wurde und zu diesem Zeitpunkt bereits eine Menge eigener Quellcode entstanden war, wurde für „OFBDp_Robust“ nicht auf andere Funktionen der Toolbox zurückgegriffen. „OFBDp_Robust“ wäre also auch außerhalb der Toolbox funktionsfähig.

Die Funktion lässt sich auf Objekte der Klassen „DAE“, „SEF“ und „WKF“ anwenden. Wie die Namen der Objekte zum Ausdruck bringen, handelt es sich bei den Objekten um Deskriptorsysteme in unterschiedlichen Darstellungsformen. „OFBDp_Robust“ erwartet als Inputargumente eine Integerzahl „Verfahren“, ein struct „inOptionen“ sowie die Rechtsparametervektoren \mathbf{P}_{sR} und die Linksparametervektoren \mathbf{L}_{sL} . Die Funktion kann ganz ohne Übergabeargumente, mit dem ersten Übergabeargument, den ersten Beiden oder allen Übergabeargumenten aufgerufen werden. Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über die Übergabe- und Rückgabeargumente der Funktion.

Wird die Funktion ohne Argumente aufgerufen, so gibt sie das Struct „n_System“ zurück. In diesem kann unter anderem nachgeschaut werden, wie viele Eigenwerte verschiebbar sind.

So können bei einem zweiten Aufruf der Funktion im Feld „EW_Wunsch“ von „inOptionen“ die Solleigenwerte des geschlossenen Regelkreises in Form eines Vektors direkt übergeben werden. Andernfalls wird der Anwender um die Eingabe eines entsprechenden Vektors gebeten, bevor ein Regler entworfen wird.

Damit ein Regler entworfen wird, muss über die Integer-Zahl „Verfahren“ angegeben werden, auf welche Weise die Robustheit optimiert werden soll. Tabelle 6.2 gibt einen Überblick über die möglichen Ausprägungen von „Verfahren“.

Tabelle 6.2.: Mögliche Ausprägungen von „Verfahren“

Übergabeargument „Verfahren“	Angewendetes Optimierungsverfahren
0	Keine Optimierung / Zufällige Wahl der Parametervektoren
1	Simplex-Algorithmus nach Nelder und Mead (fminsearch)
2	Verfahren von Hooke und Jeeves
3	Evolutionärer Algorithmus
4	Gradientenverfahren
5	Gütevektoroptimierung

Über das Struct „inOptionen“ lassen sich ebenfalls Einstellungen vornehmen. Die Anzahl der Iterationen der Algorithmen lässt sich im Feld „maxIter“ einstellen. Der Gewichtungsvektor für die Berechnung der aggregierten Konditionszahl „aggKondition“ kann im Feld „Gewichte“ übergeben werden. Die Zuordnung der Gewichte zu den Eigenwerten erfolgt über die Größe des Betrages der Eigenwerte. Der erste Wert des Vektors wird für die Konditionszahl des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes verwendet.

Damit sind die Einstellungsmöglichkeiten, die „inOptionen“ bietet, noch nicht ausgeschöpft. Diese variieren je nach gewähltem Verfahren. Für diese weiteren Optionen sowie für die Defaultwerte wird auf die Kommentierung der Funktion in Matlab verwiesen.

Das Rückgabeargument „sysDAE_de“ gibt das zu untersuchende System zurück, bei dem die Durchgriffsmatrix eliminiert wurde und das um die Dynamik der Rückführung erweitert wurde. „K_ges“ beinhaltet den Regler und „P_sR“ und „L_sL“ beinhalten die Parametervektoren. Durch ein neues Aufrufen der Funktion mit diesen Übergabeargumenten können verschiedene Optimierungsverfahren sukzessive auf das gleiche Problem angewendet werden. Bei Stagnation der Konditionszahl kann ein Wechsel auf einen anderen Algorithmus die Minimierung beschleunigen, oder sogar zu einem insgesamt besseren Ergebnis führen. Die aggregierte Kondition „aggKondition“ entspricht dem Zielfunktionswert. Es wird die aggregierte Kondition vor und nach Optimierung übergeben, sodass der Fortschritt überprüft werden kann.

7 Simulation

Standardintegrationsverfahren sind für die Simulation von DAE-Systemen nicht geeignet. Es gibt zwar Verfahren zur direkten Simulation von Deskriptorsystemen, allerdings stehen diese in Matlab nicht zur Verfügung. Für die direkte Lösung von DAE vgl. [11] (S. 217 ff.).

Trotzdem lassen sich mithilfe von Matlab Deskriptorsysteme simulieren. Dafür wird ein Verkopplungsregler entworfen, dessen Aufgabe die asymptotische Erfüllung der algebraischen Gleichungen ist. Dann reicht es für die Untersuchung des geschlossenen Regelkreises, sich auf die Differentialgleichungen zu beschränken, da der Verkopplungsregler für die Einhaltung der algebraischen Bedingungen sorgt. Die Differentialgleichungen können mit den Standardintegrationsverfahren simuliert werden. Wenn der Verkopplungsregler die Dynamik der Differentialgleichungen nicht verändert, entspricht die Simulation des geschlossenen Regelkreises der Simulation des unregulierten Deskriptorsystems. Dieser Abschnitt orientiert sich an [15] (S. 36 ff.).

Es soll ein gemäß Kapitel 2.6 in semi-expliziter Form vorliegendes System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{7.1}$$

simuliert werden.

Bei einer numerischen Simulation eines Modells kann davon ausgegangen werden, dass alle Zustände für eine Rückkopplung zur Verfügung stehen.

Nun wird das System als Zustandsraumsystem gemäß der ersten Gleichung des Systems 7.1 interpretiert:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_e.\tag{7.2}$$

Hinzu kommen die fiktiven Ausgangsgrößen

$$\mathbf{y}_{vk} = \mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}_e.\tag{7.3}$$

Wie in Abschnitt 2.4 diskutiert wurde, kann ein solches Zustandsraumsystem die differenzierende Dynamik eines Deskriptorsystems nicht nachbilden. Die Dynamik soll aber zumindest

asymptotisch angenähert werden, indem das System so geregelt wird, dass die Verkopplungsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{vk} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

erfüllt ist.

Der zu diesem Zweck zu entwerfende Regler samt Vorfilter sei

$$\mathbf{u}_e = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{u}} \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}. \quad (7.5)$$

Da die Verkopplungsbedingung für alle Eingangsverläufe $\tilde{\mathbf{u}}$ eingehalten werden muss, folgt

$$G_1(\lambda) = \frac{\mathbf{y}_{vk}(\lambda)}{\tilde{\mathbf{u}}(\lambda)} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.$$

Mit den Gleichungen des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{R}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{y}_{vk} = (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{R}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (7.7)$$

folgt durch Umstellen der ersten Gleichung nach $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und Einsetzen in die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) (\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}} \\ &= (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{v}}_i \tilde{\mathbf{w}}_i \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}}{\lambda - \tilde{\lambda}_i} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Dies ist erfüllt, wenn $\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ gilt und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine der beiden folgenden Verkopplungsbedingungen zutrifft:

1. Ausgangsseitige Verkopplungsbedingung $(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}$
2. Eingangsseitige Verkopplungsbedingung $\tilde{\mathbf{w}}_i \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$

Ein Verfahren, bei dem über eine Nebenbedingung wie (7.8) verhindert wird, dass sich bestimmte Eingangsgrößen auf bestimmte Ausgangsgrößen auswirken, wird Dreiecksentkopplung genannt.

Durch Einsetzen der Parametervektoren

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{v}}_i \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{1i} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_i \quad (7.9)$$

in die ausgangsseitige Verkopplungsbedingung folgt

$$\mathbf{0} = (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{p}}_{1i} + \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{p}}_{2i}.$$

Wird das Eigenwertproblem des geschlossenen Regelkreises hinzugenommen, das für alle endlichen Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises Geltung hat, ergibt sich die Entwurfsgleichung

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} & -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{A}_{22} & -\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_{1i} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2i} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n_e + n_{\infty,s}. \quad (7.10)$$

Hierbei dürfen die endlichen Eigenwerte nicht verändert werden, da sich sonst auch die Dynamik des Systems verändert. Bei properen Systemen ist $n_{\infty,s} = 0$, sodass über diese Entwurfsgleichung keine zusätzlichen endlichen Eigenwerte erzeugt werden. Die über (7.10) vorgegebenen Eigenwerte sind in den fiktiven Ausgangsgrößen \mathbf{y}_{vk} (7.7) nicht beobachtbar.

Die nicht steuerbaren unendlichen dynamischen Eigenwerte werden als endliche Eigenwerte über die einfache Entwurfsgleichung

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} & -\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_{1i} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{2i} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = n_e + n_{\infty,s} + 1, \dots, r \quad (7.11)$$

im Simulationsmodell vorgegeben. Es handelt sich dabei um die Verkopplungseigenwerte. Diese können die ausgangsseitige Verkopplungsbedingung nicht erfüllen, sodass sie in \mathbf{y}_{vk} immer beobachtbar sind. Damit sie die Verkopplungsbedingung zumindest asymptotisch erfüllen, müssen sie stabil gewählt werden, was immer möglich ist.

Eine Anregung dieser inkonsistenten Modi durch $\tilde{\mathbf{u}}$ würde aufgrund ihrer Beobachtbarkeit auch eine Anregung von \mathbf{y}_{vk} bedeuten. Dies würde gegen die Verkopplungsbedingung (7.4) verstoßen. Daher müssen die Verkopplungseigenwerte im Zustandsmodell (7.6) unsteuerbar sein. Dies ist gleichbedeutend mit der Erfüllung der eingangsseitigen Verkopplungsbedingung

$$\tilde{\mathbf{w}}_i \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad i = n_e + n_{\infty,s} + 1, \dots, r. \quad (7.12)$$

Darüber hinaus muss für die Dreiecksentkopplung

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (7.13)$$

gelten.

Die beiden Bedingungen (7.12) und (7.13) enthalten das Vorfilter und müssen daher beim Entwurf desselben berücksichtigt werden.

(7.12) lässt sich zu

$$\tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{F}}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

umformulieren.

$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ ist dabei eine beliebige Matrix mit $n_e + n_{\infty,s}$ Zeilen. Linksseitige Multiplikation mit $\tilde{\mathbf{V}}$ führt auf

$$\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{\mathbf{V}}_1\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{F}}}.$$

Werden diese Gleichungen mit (7.13) zusammengefasst, folgt für den Entwurf des Vorfilters die Bedingung

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{V}}_1 \\ \tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{F}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{F}}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7.14)$$

Nach Berechnung von $\tilde{\mathbf{R}}$ und $\tilde{\mathbf{F}}$ kann der Regler \mathbf{R} für das zugrunde liegende Deskriptorsystem wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \right) \\ &= (\mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 + (\mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2) \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Wird \mathbf{M}_s so gewählt, dass sich für $\mathbf{F} = \mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2$ eine reguläre $(p \times p)$ -Matrix ergibt, was stets möglich ist, ergibt sich das Regelungsgesetz durch Auflösen nach \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2 & -\mathbf{M}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (\mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2) \tilde{\mathbf{u}}. \quad (7.16)$$

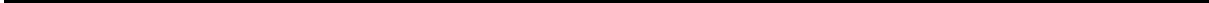
Es wird also nicht das ursprüngliche System simuliert, sondern das mit diesem Regler geregelte ursprüngliche System.

Für den Fall $n_{\infty,s} = 0$, also bei einem properen System, entspricht die Simulation der mit dem Verkopplungsregler geregelten langsamen Dynamik der Simulation des ursprünglichen Systems, wenn:

1. die Parametervektoren \mathbf{p}_{2i} Nullvektoren sind und
2. $\tilde{\mathbf{F}}$ und \mathbf{M}_s so gewählt wurden, dass $(\mathbf{M}_s\tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2) = \mathbf{I}$ erfüllt ist

Denn dann wird die langsame Dynamik durch den Regler nicht verändert und weiterhin wird $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ erfüllt.

Liegt kein properes System vor, kann dieses Verfahren nicht angewendet werden. Stattdessen kann durch Erweiterung der Eingänge um die Ableitungen der Eingangsfunktion ein anderer Verkopplungsregler entworfen werden, der ebenfalls sicherstellt, dass die algebraischen Gleichungen asymptotisch erfüllt werden. Das Verfahren wird in [12] für properer Systeme beschrieben. Die Behandlung von improperen Systemen erfolgt in der vom gleichen Autor eingereichten, bislang aber nicht veröffentlichten Dissertation. Dieses Verfahren ist in der im vorigen Kapitel erwähnten Toolbox in Form der Funktion „createCouplingMinExt“ implementiert und wird auch in [18] beschrieben. Die Simulationen in Kapitel 5.4 wurden zwar mithilfe dieser Funktion durchgeführt, allerdings wurde auch der vorher beschriebene Verkopplungsregler implementiert und mit diesem wurden identische Ergebnisse erzielt.



8 Zusammenfassung und Ausblick

Durch Minimierung der in Kapitel 3 hergeleiteten Konditionszahl konnte die Robustheit der Eigenwerte eines mit einer Ausgangsrückführung geschlossenen Deskriptorsystems erhöht werden. Dafür wurde eine Ausgangsrückführung verwendet, die die für die Polplatzierung nicht benötigten Freiheitsgrade in parametrischer Form aufdeckt.

Der Entwurf einer solchen Ausgangsrückführung wurde in Matlab implementiert. Die Minimierung der Kondition wird über verschiedene, auch miteinander kombinierbare und ebenfalls in Matlab implementierte Algorithmen ermöglicht. Darüber hinaus wurden diese Funktionalitäten in eine GUI eingebettet, wodurch ein hoher Grad an Benutzerfreundlichkeit erreicht wird. Da eine GUI aber die Kombination mit anderen Matlab-Funktionalitäten erschwert, wurde der Entwurf der Ausgangsrückführung und die Minimierung der Kondition zusätzlich in eine Matlab-Toolbox für Deskriptorsysteme integriert, die am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der TU Darmstadt erstellt wurde.

Regelkreise mit unterschiedlich robusten aber gleichen Eigenwerten wurden simulativ miteinander verglichen. Diese Regelkreise wurden durch Anwendung unterschiedlicher Regler auf das gleiche System erzeugt. Die Simulationen haben ergeben, dass die Reduktion der Kondition nicht nur zu robusteren Eigenwerten führt, sondern noch andere Auswirkungen auf die Systemdynamik hat. Wie diese Auswirkungen zu erklären sind, wurde in dieser Arbeit nicht behandelt. Dafür könnte an [9] angeknüpft werden.

In [9] werden für vollständige Deskriptorrückführungen die Auswirkungen der Minimierung der Kondition auf Reglermatrix und Einschwingverhalten mittels oberer Schranken untersucht. Dies könnte insbesondere in der Praxis hoch relevant werden, wenn beim Entwurf maximale Überschwingweiten und Stellgrößenbeschränkungen beachtet werden müssen.

Inwieweit Vorgehensweise und Ergebnisse von [9] allerdings auf Ausgangsrückführungen übertragbar sind, bleibt zu untersuchen.



A Anhang

System A:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Regler für System A:

$$\mathbf{R}_{A,1} = \begin{bmatrix} -0,3400 & -0,8219 \\ -0,1239 & -0,1168 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{A,2} = \begin{bmatrix} -0,3477 & -0,3379 \\ -0,6901 & -0,1718 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{A,3} = \begin{bmatrix} -0,3646 & -0,2725 \\ -0,6493 & -2,8513 \end{bmatrix}$$

Störmatrizen für System A:

$$\mathbf{S}_{A,E} = \begin{bmatrix} 0,0022 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0094 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{A,M} = \begin{bmatrix} 0 & 0,0343 & 0,0175 & 0,0103 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0303 & 0,0143 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0092 & 0,0220 & 0,0151 \\ 0,0433 & 0,0335 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0264 & 0 & 0,0061 \end{bmatrix}$$

System B:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Regler für System B:

$$\mathbf{R}_{B,1} = \begin{bmatrix} -21,7773 & 0,0189 & 3,6015 \\ -14,4780 & 0,0192 & 3,1253 \\ -0,0305 & -0,0000 & -1,4937 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{B,2} = \begin{bmatrix} -52,0035 & -0,0075 & 105,3400 \\ 182,4123 & 1,0466 & -402,9071 \\ 5,5442 & -0,0007 & -21,0720 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{B,3} = \begin{bmatrix} -50,9596 & 0,0658 & 56,6592 \\ 320,0051 & 0,2703 & -388,6810 \\ -0,6217 & -0,0007 & 0,2261 \end{bmatrix}$$

Störmatrizen für System B:

$$\mathbf{S}_{B,E} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,7647 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5583 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{B,M} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0,7714 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4814 & 0,9663 & 0 & 0 & 0,3223 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4379 & 0,7401 & 0,6897 & 0,0481 \\ 0,5461 & 0 & 0,9721 & 0 & 0,7334 & 0,1012 \\ 0 & 0 & 0,7678 & 0 & 0,8603 & 0,8786 \end{bmatrix}$$

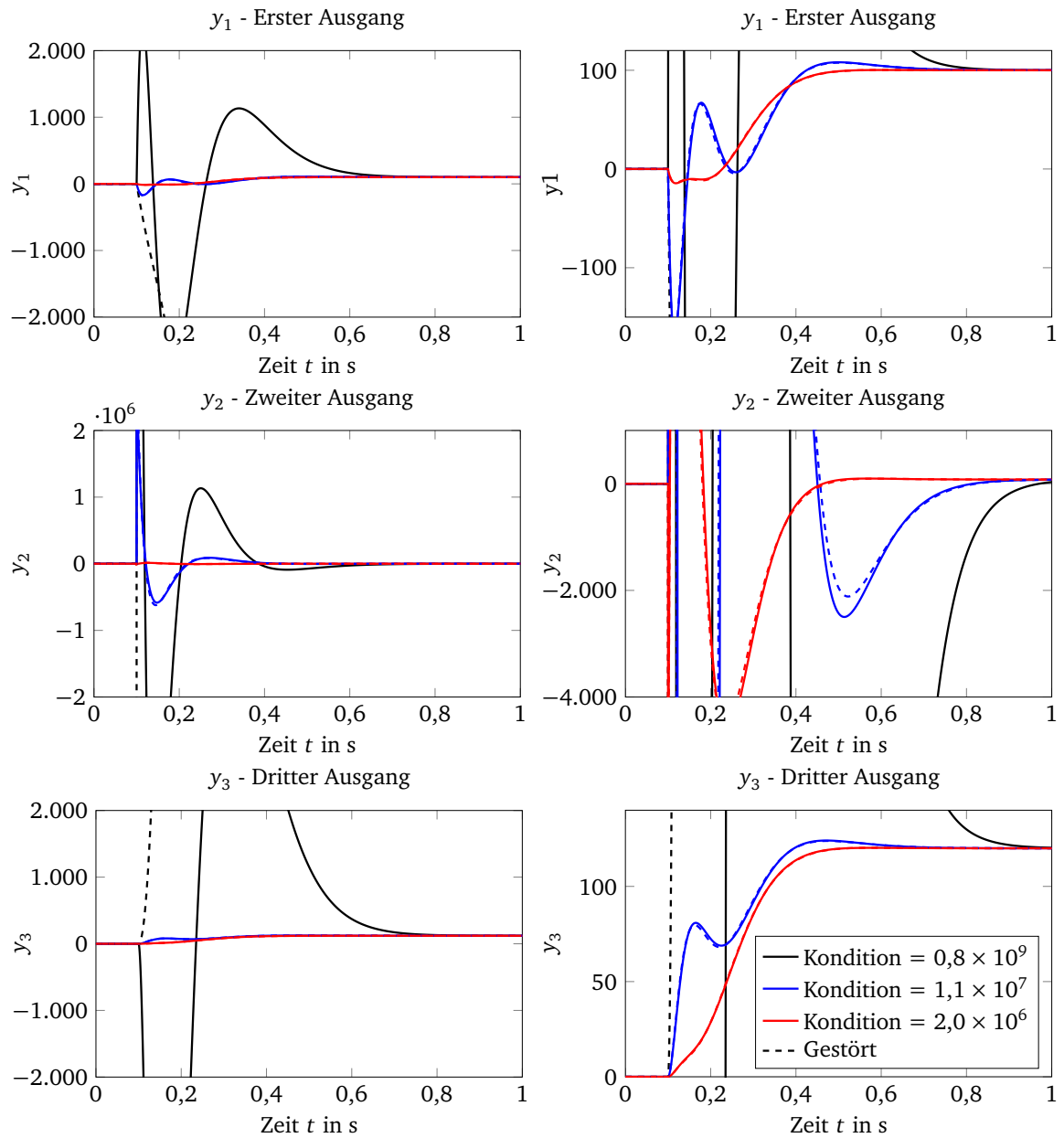
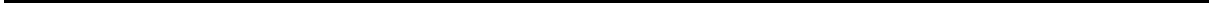


Abbildung A.1.: Systemantwort von System B auf einen Sprung bei $t = 0,1$ s mit $\mathbf{w}^T = [100, 80, 120]$



Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J.: *Fuzzy Logik, Neuronale Netze und Evolutionäre Algorithmen*. Shaker Verlag, Aachen, 2007.
- [2] AILON, A.: *On the design of output feedback for finite and infinite pole assignment in singular systems with application to the control problem of constrained robots*. Circuits, Systems and Signal Processing, 13(5):525–544, 1994.
- [3] DAI, L.: *Singular control systems*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1989.
- [4] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik - Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 2008.
- [5] GANTMACHER, F. R.: *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] GERSCHGORIN, S.: *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*. Arbeiten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 6:749–754, 1931.
- [7] HOUSEHOLDER, A. S.: *The theory of matrices in numerical analysis*. Dover Publications, 2006.
- [8] KALMAN, R.: *On the general theory of control systems*. Proc. of the first IFAC Congress on Automatic and Remote Control, 1:481–492, 1960.
- [9] KAUTSKY, J., N. K. NICHOLS und E. CHU: *Robust pole assignment in singular control systems*. Linear Algebra and its Applications, 121:9–37, 1989.
- [10] KREISSELMEIER, G. und R. STEINHAUSER: *Systematische Auslegung von Reglern durch optimierung eines vektoriellen Gütekriteriums*. Regelungstechnik, 27:76 – 79, 1979.
- [11] KUNKEL, P. und V. L. MEHRMANN: *Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution*. European Mathematical Society, 2006.
- [12] LABISCH, D., M. MANDERLA und U. KONIGORSKI: *Control, simulation and stability analysis of nonlinear regular proper DAEs*. Proc. of the 20th Mediterranean Conference on Control and Automation 2012, S. 392–397, Juli 2012.
- [13] LAGARIAS, J. C., J. A. REEDS, M. H. WRIGHT und P. E. WRIGHT: *Convergence Properties of the Nelder–Mead Simplex Method in Low Dimensions*. SIAM Journal on Optimization, 9(1):112–147, Jan. 1998.
- [14] LEWIS, F. L.: *A survey of linear singular systems*. Circuits, Systems and Signal Processing, 5(1):3–36, 1986.
- [15] MANDERLA, M.: *Eine Methodik zum Regler- und Beobachterentwurf für Mehrgrößensysteme in Deskriptorform*. Berichte aus dem Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik

der TU Darmstadt. VDI Verl., 2011.

- [16] PENROSE, R. und J. A. TODD: *A generalized inverse for matrices*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 51(03):406–413, 1955.
- [17] PETERSEN, K. B. und M. S. PEDERSEN: *The Matrix Cookbook*, nov 2012. Version 20121115.
- [18] STEIN, T.: *Automatisierter Entwurf regulärer Deskriptorsysteme*. Masterthesis am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik der TU Darmstadt, August 2013.
- [19] STEWART, G. W.: *Gershgorin theory for the generalized eigenvalue problem*. Mathematics of Computation, 29(130):600–606, 1975.
- [20] STEWART, G. W. und J.-G. SUN: *Matrix perturbation theory*. Academic press, 1990.
- [21] STREHMEL, K., R. WEINER und H. PODHAISKY: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*. Springer, 2012.
- [22] STRUBEL, J. und U. KONIGORSKI: *Robust Eigenstructure Assignment using Parametric Output Feedback*. Unveröffentlicht.
- [23] VOIGT, C. und J. ADAMY: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*. Oldenbourg, 2007.
- [24] WILKINSON, J. H.: *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford Univ Press, 1965.
- [25] XU, S. und J. LAM: *Robust control and filtering of singular systems*. Springer, Berlin; New York, 2006.
- [26] YU, R. und D. WANG: *Structural properties and poles assignability of LTI singular systems under output feedback*. Automatica, 39(4):685–692, Apr. 2003.